

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

7. harjoitus, (pe 25.11.2016)

1. Yritys valmistaa muoviraaka-aineesta kahta tuotetta A ja B. Tuotteen A valmistaminen vie aikaa 15min ja raaka-ainetta 10kg. Tuotteen B valmistaminen vie aikaa 12min ja raaka-ainetta 15kg. Raaka-ainetta on olemassa 2500 kg/viikko ja laitteisto, jolla tuotteita valmistetaan on käytössä 40 tuntia viikossa. Yhden A-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 5 euroa ja yhden B-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 7 euroa. Mahdollisesti käyttämättä jäänyt muoviraaka-aine voidaan myydä hintaan 500 euroa/tonni. Määrittele päätösmuuttujat ja muodosta lp-malli myyntivoiton maksimoimiseksi. (Älä ratkaise mallia.)

Päätösmuuttujat

x_1 = tuotteen A valmistusmäärä (kpl/vko)
 x_2 = " " B " " " (kpl/vko)
 x_3 = raaka-aineen myynti (kg/vko)

tavoitefunktio $z = 5x_1 + 7x_2 + 0,5x_3$

rajoitukset

raaka-aine: $10x_1 + 15x_2 + x_3 \leq 2500$ (kg)
 aika: $15x_1 + 12x_2 \leq 40 \cdot 60$ (min)

LP-malli:

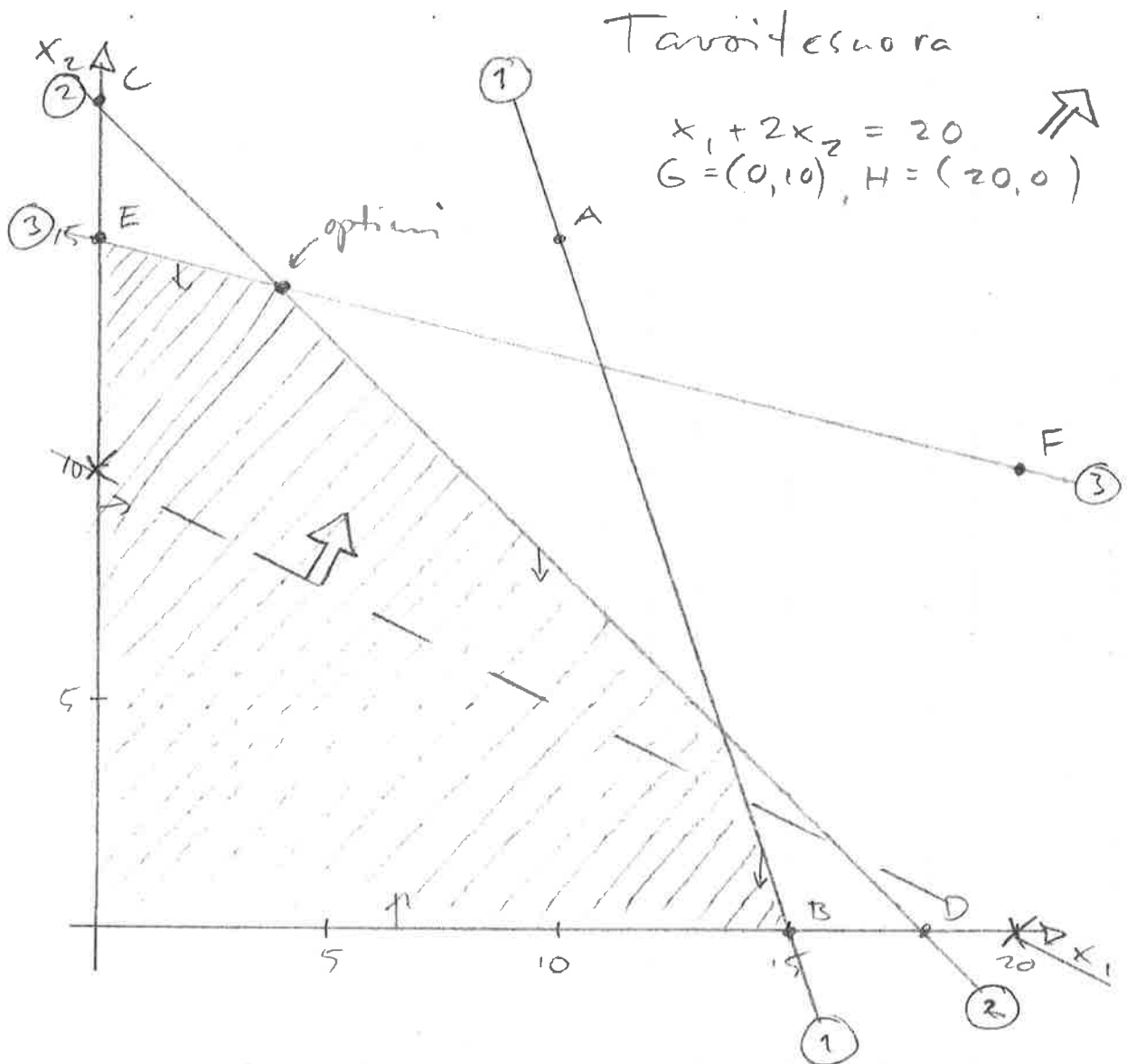
max $z = 5x_1 + 7x_2 + 0,5x_3$
 s.t. $10x_1 + 15x_2 + x_3 \leq 2500$
 $15x_1 + 12x_2 \leq 2400$
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

2. Ratkaise graafisesti seuraava lp-malli

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{ehdoin} \quad 3x_1 + x_2 &\leq 45 \\ x_1 + x_2 &\leq 18 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Rajallit

- ① $3x_1 + x_2 \leq 45$ ↘ alapuoli: A=(10,15), B=(15,0)
 ② $x_1 + x_2 \leq 18$ ↘ - - - C=(0,18), D=(18,0)
 ③ $x_1 + 4x_2 \leq 60$ ↘ - - - E=(0,15), F=(20,10)



optimiss= $\begin{cases} \textcircled{2} & \begin{cases} x_1 + x_2 = 18 \\ x_1 + 4x_2 = 60 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot (-1) \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 18 \\ 3x_2 = 42 \end{cases} \end{cases}$

$\rightarrow x_2 = 14 \quad \text{ja} \quad x_1 = 4, \quad z = 4 + 2 \cdot 14 = 32$

$V: \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 14 \\ z = 32 \end{cases}$

3. Pienyritys valmistaa kahta tuotetta 1 ja 2, ja myy kaiken valmistamansa. Kumpaakin tuotetta käsitellään kolmella osastolla seuraavan taulukon mukaisesti.

tuote	tuotantoaika (tuntia)		
	os. A	os. B	os. C
1	4	2	8
2	4	4	4

Kullakin osastolla käytettävissä oleva työvoima on rajallinen siten, että työtunteja on osastoilla viikossa käytettävissä seuraavasti

osasto	työtunteja viikossa
A	320
B	240
C	400

Kate (myyntitulo - valmistuskustannukset) yhdeltä "1"-tuotteelta on 300€ ja kate yhdeltä "2"-tuotteelta 500€.

Muodosta LP-malli yrityksen kokonaiskatteen maksimoimiseksi. (Älä ratkaise mallia.)

$$x_1 = \text{tuotteen 1 valmistus viikossa (kpl/vko)}$$

$$x_2 = \text{tuotteen 2 valmistus viikossa (kpl/vko)}$$

LP-malli

$$\begin{aligned} \max z &= 300x_1 + 500x_2 \\ \text{ehdot} & \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 \leq 320 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 240 \\ 8x_1 + 4x_2 \leq 400 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Lindo

$$\begin{cases} x_1 = 26,7 \\ x_2 = 46,7 \\ z = 31333,33 \end{cases}$$

4. Edellisessä tehtävässä yrityksen työaika-resurssi on 960 tuntia/viikossa eli 24 työntekijää. a) Pohdi seuraavaa kysymystä: Jos yritykselle tarjoutuu mahdollisuus palkata kaksi uutta työntekijää, niin miten tämä uusi resurssi allokoidaan (sijoitetaan) eri osastoille?

b) Pohdi seuraavaa kysymystä: Jos samalla, kun saadaan kaksi uutta työntekijää, on mahdollista kouluttaa vanhojakin työntekijöitä, niin miten työresurssi allokoidaan osastoille yrityksen voiton maksimoimiseksi?

$$\begin{aligned} \max z &= 300x_1 + 500x_2 \\ \text{ehdot} & \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 \leq 320 + r_A \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 240 + r_B \\ 8x_1 + 4x_2 \leq 400 + r_C \\ r_A + r_B + r_C = 80 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z &= 300x_1 + 500x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - r_A \leq 320 \\ 2x_1 + 4x_2 - r_B \leq 240 \\ 8x_1 + 4x_2 - r_C \leq 400 \\ r_A + r_B + r_C = 80 \end{cases} \end{aligned}$$

Lindo $x_1 = 0, x_2 = 80, r_A = 0, r_B = 80, r_C = 0, z = 40000$

by simplex method

A-variables w_a w_b w_c
 B 1 1 1
 C 1 1 1

$$\left(\begin{array}{l} \max z = 300x_1 + 500x_2 \\ 4x_1 + 4x_2 \leq w_a \\ 2x_1 + 4x_2 \leq w_b \\ 8x_1 + 4x_2 \leq w_c \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1040 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \max z = 300x_1 + 500x_2 \\ 4x_1 + 4x_2 - w_a \leq 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - w_b \leq 0 \\ 8x_1 + 4x_2 - w_c \leq 0 \\ -w_c \leq 0 \\ w_a + w_b + w_c = 1040 \end{array}$$

LINDO \rightarrow

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 86,7 \\ w_a = 346,7 \\ w_b = 346,7 \\ w_c = 346,7 \\ z = 43333,33 \end{array} \right\}$$

5. a) Piirrä seuraavan LP-mallin käypä alue.

$$\begin{aligned} \min z = & x_1 - 5x_2 \\ \text{ehdoin} & 2x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ & x_1 + x_2 \geq 14 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

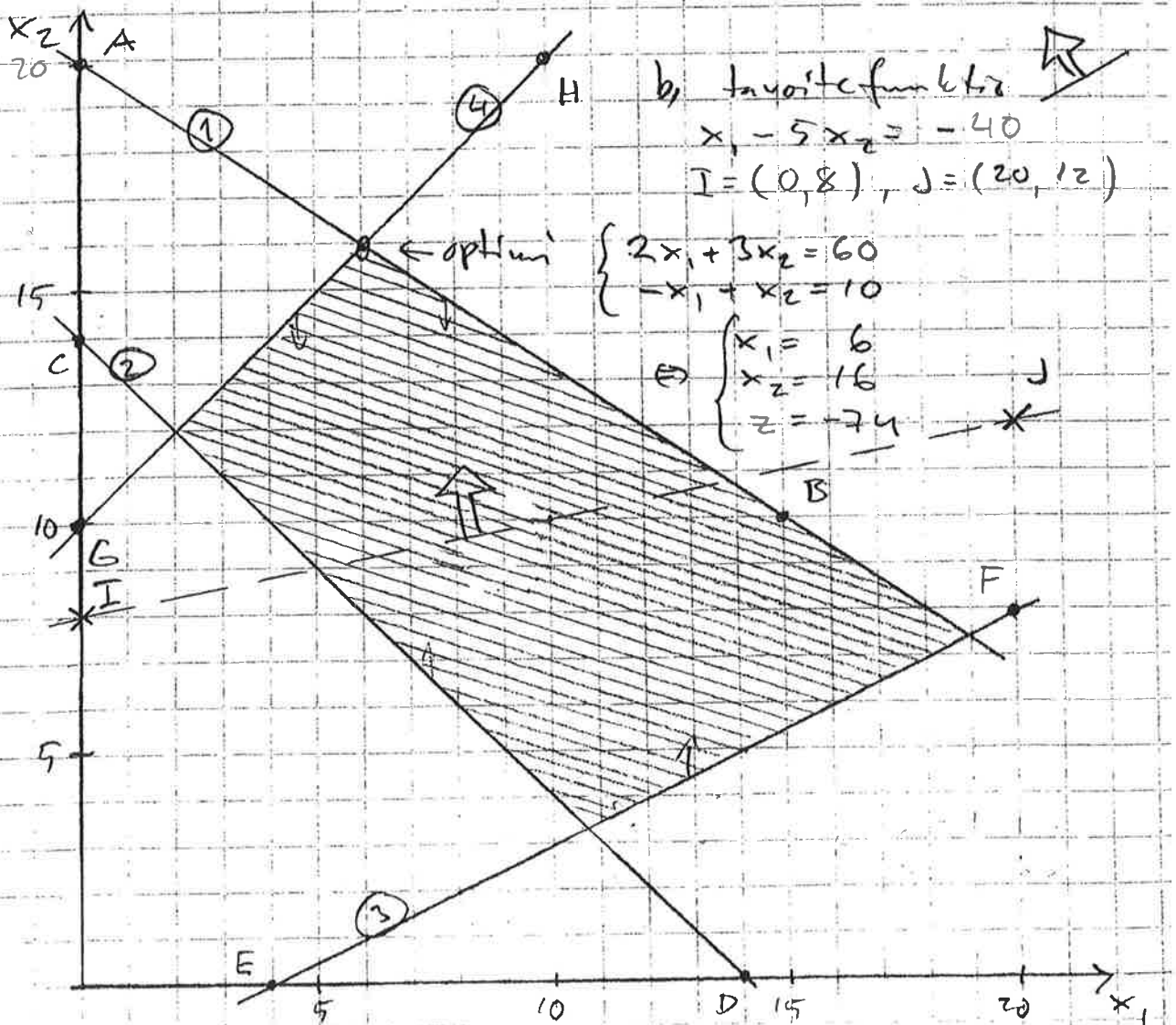
b) Ratkaise malli.

a) ① $2x_1 + 3x_2 \leq 60 \downarrow A=(0,20), B=(15,10)$

② $x_1 + x_2 \geq 14 \uparrow C=(0,14), D=(14,0)$

③ $x_1 - 2x_2 \leq 4 \uparrow E=(4,0), F=(20,8)$

④ $-x_1 + x_2 \leq 10 \downarrow G=(0,10), H=(10,20)$

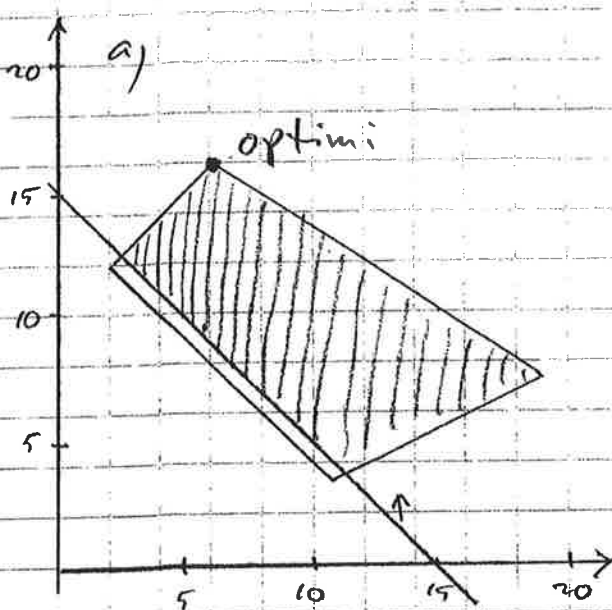


6. a) Miten tehtävän 5 optimiratkaisu muuttuu, jos rajoitteisiin lisätään uusi rajoite

$$x_1 + x_2 \geq 15$$

b) Miten edellisen tehtävän optimiratkaisu muuttuu, jos rajoitteisiin lisätään uusi rajoite

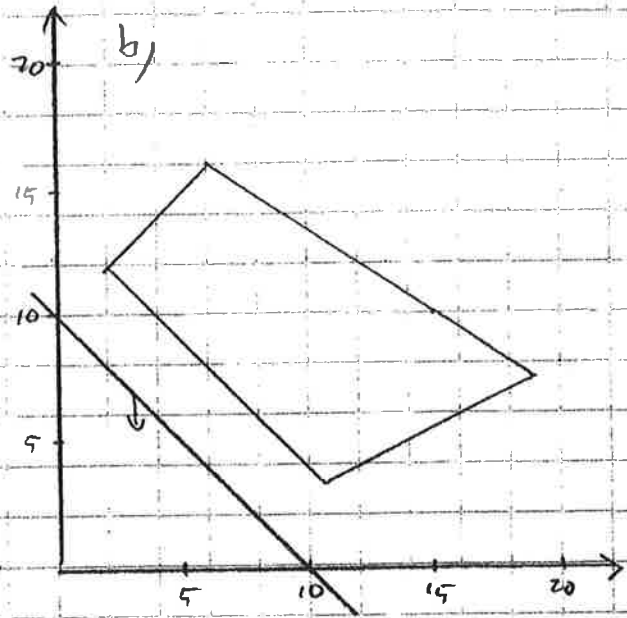
$$x_1 + x_2 \leq 10$$



$$x_1 + x_2 \geq 15 \uparrow \text{yläp.}$$

$$K = (0, 15), L = (15, 0)$$

Käypä alue pienempi,
muutta optimi
ei muuttunut



$$x_1 + x_2 \leq 10 \downarrow \text{alap.}$$

$$M = (0, 10), N = (10, 0)$$

Käypä alue tyhjä
 \rightarrow ei ratkaisua