

## Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

### 8. harjoitus, (la 26.11.2016)

#### 1. Tarkastellaan matriisia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

Jonka käänteismatriisi on

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Tarkista laskemalla, että annettu  $\mathbf{A}$ :n käänteismatriisi on pätevä.

Siis tarkista, että  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$  ja  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ .

b) Ratkaise tämän tiedon avulla  $x$  ja  $y$  yhtälöparista

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Merkitään tehtävän 1c) yhtälöryhmän ratkaisua vektorina  $(x_0 \ y_0)^T$ . Merkitään vektorilla  $(x_1 \ y_1)^T$  sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta ensimmäisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Merkitään vektorilla  $(x_2 \ y_2)^T$  sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta toisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Toisin sanoen

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Laske vektorit  $(x_1 \ y_1)^T$  ja  $(x_2 \ y_2)^T$ .

*Huomaa, että yhtälöryhmän kerroinmatriisin  $\mathbf{A}$  käänteismatriisi  $\mathbf{A}^{-1}$  on nyt tiedossamme. Se esiintyi tehtävässä 1. Tämän vuoksi ylivoimaisesti helpoin tapa ratkaista yhtälöryhmät (2) ja (3) on käyttää periaatetta: ”ratkaisu on  $\mathbf{A}^{-1}$  kertaa RHS”.*

3. a) Kun yhtälöryhmä (1) muutettiin yhtälöryhmäksi (2), niin ensimmäisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Silloin ratkaisu muuttui määrän

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Laske tämä muutos.

b) Kun yhtälöryhmä (1) muutettiin yhtälöryhmäksi (3), niin toisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Laske muutos.

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

c) Voitko löytää nämä muutosvektorit suoraan käänteismatriisista  $\mathbf{A}^{-1}$ ?

4. Laske determinantit

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Olkoon tutkittavina matriisit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Laske a) determinantti b) transpoosi ja c) käänteismatriisi matriisille  $\mathbf{M}$ .

6. Laske a) determinantti b) transpoosi ja c) käänteismatriisi matriisille  $\mathbf{N}$ .

7. Alla on taulukossa esitettyä erään yrityksen tuotannon jakautuminen ja panosten käyttö tilikaudella. Laske tuotteiden omakustannusarvot.

		Os1	Os2	Os3	myynti (kpl)	yhteensä (kpl)	hinta (€/kpl)
	Os1	50	100	0	850	1000	$p_1$
	Os2	10	40	50	400	500	$p_2$
	Os3	20	0	30	200	250	$p_3$
raaka-aine 1	tt1	300	0	700		1000	1.00
raaka-aine 2	tt2	400	400	0		800	10.00
työvoima 1	tt3	70	100	150		320	20.00
työvoima 2	tt4	10	15	10		35	50.00

8. Kasvata edellisen tehtävän yksikköhintoja siten, että jokaisesta tuotteesta saadaan 15% kate. Laske sitten jokaisen osaston kokonaistuotokset, myyntituotot ja tuotannontekijöiden kustannukset, kun lopputuotteiden myynti muuttuu seuraavan taulukon mukaiseksi.

	myynti (kpl)
Os1	500
Os2	1000
Os3	400

Miten suuren katteen yritys kokonaisuudessaan saa ?