Tampereen kesäyliopisto, syksy 2016

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

8. harjoitus, (la 26.11.2016)

1. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

Jonka käänteismatriisi on

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Tarkista laskemalla, että annettu A:n käänteismatriisi on pätevä.
Siis tarkista, että $A^{-1}A = I$ ja $AA^{-1} = I$.
b) Ratkaise tämän tiedon avulla x ja y yhtälöparista

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) $(2 \;\; 1)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 2\cdot 3 + 1\cdot(-5) = 1$

$(2 \;\; 1)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 = 0$

$(5 \;\; 3)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 5\cdot 3 + 3\cdot(-5) = 0$

$(5 \;\; 3)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\cdot(-1) + 3\cdot 2 = 1$

b) $(3 \;\; -1)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 3\cdot 2 + (-1)\cdot 5 = 1$

$(3 \;\; -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\cdot 1 + (-1)\cdot 3 = 0$

$(-5 \;\; 2)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = -5\cdot 2 + 2\cdot 5 = 0$

$(-5 \;\; 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -5\cdot 1 + 2\cdot 3 = 1$

c) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + (-1)\cdot 1 \\ -5\cdot 3 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix}$

$\therefore x = 8, \; y = -13$

Tark. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 8 + 1\cdot(-13) \\ 5\cdot 8 + 3\cdot(-13) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Merkitään tehtävän 1c) yhtälöryhmän ratkaisua vektorina $(x_0\ y_0)^T$. Merkitään vektorilla $(x_1\ y_1)^T$ sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta ensimmäisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Merkitään vektorilla $(x_2\ y_2)^T$ sellaisen yhtälöryhmän ratkaisua, joka on muuten sama kuin 1c):ssä, mutta toisen yhtälön RHS on kasvanut yhdellä. Toisin sanoen

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Laske vektorit $(x_1\ y_1)^T$ ja $(x_2\ y_2)^T$.
Huomaa, että yhtälöryhmän kerroinmatriisin $\boldsymbol{A}$ käänteismatriisi $\boldsymbol{A}^{-1}$ on nyt tiedossamme. Se esiintyi tehtävässä 1. Tämän vuoksi ylivoimaisesti helpoin tapa ratkaista yhtälöryhmät (2) ja (3) on käyttää periaatetta: "ratkaisu on $\boldsymbol{A}^{-1}$ kertaa RHS".

$$A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} \quad [1c)]$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix}$$

3. a) Kun yhtälöryhmä (1) muutettiin yhtälöryhmäksi (2), niin ensimmäisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Silloin ratkaisu muuttui määrän

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Laske tämä muutos.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

A^{-1}:n 1. sarake

b) Kun yhtälöryhmä (1) muutettiin yhtälöryhmäksi (3), niin toisen yhtälön RHS kasvoi yhdellä (muuten yht.ryhmä pysyi samana). Silloin ratkaisu muuttui määrän

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Laske tämä muutos.

c) Voitko löytää nämä muutosvektorit suoraan käänteismatriisista $\boldsymbol{A}^{-1}$?

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A^{-1}:n 2. sarake

4. Laske determinantit

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (-1)\cdot(-3) = 2 - 3 = \underline{\underline{-1}}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2\cdot(1-0) - 0\cdot(5-0) + 1\cdot(5-3) = \underline{\underline{4}}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot 2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 = \underline{\underline{12}}$

Olkoon tutkittavina matriisit

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{ja} \qquad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Laske a) determinantti det(M) b) transpoosi $\mathbf{M}^T$ ja c) käänteismatriisi $\mathbf{M}^{-1}$ matriisille $\boldsymbol{M}$.

a) $\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= 1\cdot(3-0) - 2(2-0) + 0 = \underline{\underline{-1}}$

b) $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 2 \quad \cdot(-1)$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 2 \quad \cdot 1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Määritä rivioperaatioiden avulla käänteismatriisi matriisille $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $\det(N)$, b) N^T, c) N^{-1}

c) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot 3$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{2} \quad \cdot(-\frac{1}{2}) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot -\frac{1}{2} \quad \cdot \frac{1}{2}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}5 & 1{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow N^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}5 & -0{,}5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\det(N) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= 0 \quad - 0 \quad + 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) = -2$

b) $N^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Alla on taulukossa esitettynä erään yrityksen tuotannon jakautuminen ja panosten käyttö tilikaudella. Laske tuotteiden omakustannusarvot.

		Os1	Os2	Os3	myynti (kpl)	yhteensä (kpl)	hinta (€/kpl)
	Os1	50	100	0	850	1000	p_1
	Os2	10	40	50	400	500	p_2
	Os3	20	0	30	200	250	p_3
raaka-aine 1	tt1	300	0	700		1000	1.00
raaka-aine 2	tt2	400	400	0		800	10.00
työvoima 1	tt3	70	100	150		320	20.00
työvoima 2	tt4	10	15	10		35	50.00

$A = \begin{pmatrix} \frac{50}{1000} & \frac{100}{500} & \frac{0}{250} \\ \frac{10}{1000} & \frac{40}{500} & \frac{50}{250} \\ \frac{20}{1000} & \frac{0}{500} & \frac{30}{250} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}20 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}08 & 0{,}20 \\ 0{,}02 & 0 & 0{,}12 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} \frac{300}{1000} & \frac{0}{500} & \frac{700}{250} \\ \frac{400}{1000} & \frac{400}{500} & \frac{0}{250} \\ \frac{70}{1000} & \frac{100}{500} & \frac{150}{250} \\ \frac{10}{1000} & \frac{15}{500} & \frac{10}{250} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0 & 2{,}80 \\ 0{,}40 & 0{,}80 & 0 \\ 0{,}07 & 0{,}20 & 0{,}60 \\ 0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}04 \end{pmatrix}$

$\bar{c} = \begin{pmatrix} 1{,}00 \\ 10{,}00 \\ 20{,}00 \\ 50{,}00 \end{pmatrix} \qquad \bar{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = ?$

$$\bar{p}^T = \bar{c}^T B (I-A)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 10 & 20 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0 & 2{,}80 \\ 0{,}40 & 0{,}80 & 0 \\ 0{,}07 & 0{,}20 & 0{,}60 \\ 0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}20 & 0 \\ -0{,}01 & 0{,}92 & -0{,}20 \\ -0{,}02 & 0 & 0{,}88 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\overset{\text{Excel}}{=} \begin{pmatrix} 7{,}177 & 16{,}234 & 22{,}780 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad p_1 = 7{,}18\ €$$
$$p_2 = 16{,}23\ €$$
$$p_3 = 22{,}78\ €$$

8 Kasvata edellisen tehtävän yksikköhintoja siten, että jokaisesta tuotteesta saadaan 15% kate. Laske sitten jokaisen osaston kokonaistuotokset, myyntituotot ja tuotannontekijöiden kustannukset, kun lopputuotteiden myynti muuttuu seuraavan taulukon mukaiseksi.

	myynti (kpl)
Os1	500
Os2	1000
Os3	400

Miten suuren katteen yritys kokonaisuudessaan saa ?

$$\left.\begin{array}{l} \text{Myyntihinta } p_i^* = k p_i \\ \text{omakustannusarvo } p_i \\ \text{kate } 15\% \end{array}\right\} \Rightarrow \quad k p_i - p_i = 0{,}15\, k p_i$$

$$0{,}85\, k = 1$$
$$k = \frac{1}{0{,}85}$$

$$p_1^* = \frac{7{,}17679\ €}{0{,}85} = 8{,}44\ €$$

$$p_2^* = \frac{16{,}23408\ €}{0{,}85} = 19{,}74\ €$$

$$p_3^* = \frac{22{,}78047\ €}{0{,}85} = 26{,}80\ €$$

Myyntitulo

$$\bar{p}^{*T}\bar{d} = \begin{pmatrix} 8{,}44 & 19{,}74 & 26{,}80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 1000 \\ 400 \end{pmatrix} = 34\,680 €$$

Valmistuskustannukset

$$\bar{c}^T B \bar{x} = \underbrace{\bar{c}^T B (I-A)^{-1}}_{\bar{p}^T} \bar{d}$$

$$= \begin{pmatrix} 7{,}177 & 16{,}234 & 22{,}750 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 1000 \\ 400 \end{pmatrix}$$

$$= 28\,934{,}5 €$$

Kate $34680 € - 28934{,}5 € = 5745{,}5 €$

$(16{,}6\,\%)$