

## Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

### 10. harjoitus, viikko 14 (ti 2.4. – pe 5.4.13)

R2	ma	14–16	D115	R5	to	14–16	D115
R3	ti	08–10	D115	R6	pe	08–10	D115
R4	to	08–10	C209	R7	pe	10–12	D115
				R8	ti	10–12	D115

1. Määritä a) rivioperaatioiden avulla b) adjungaatin avulla käänteismatriisi matriisille

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Ratkaise Cramerin kaavoilla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z = -7 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 9y - 20z = 0 \end{cases}$$

3. Laske determinantit

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

4. Etsi jokin ei-triviaali ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} 3x - 3y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ 3x + 9y - 11z = 0 \end{cases}$$

5. a) Millä  $a$ :n arvolla alla olevalla yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu? Mikä se on?

b) Millä  $a$ :n arvolla yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu? Etsi jokin ei-triviaali ratkaisu?

$$\begin{cases} 3x - 3y + 4z = 0 \\ y - z = 0 \\ 3x - 2y + az = 0 \end{cases}$$

6. Kaupungissa on 10 000 taloutta, jossa pyykki pestää käyttäen jotakin kolmesta pesuaineesta "A", "B" tai "C". Pesuaine A on laadukasta ja vastaa hyvin kuluttajien tarpeita. Niistä kuluttajista, jotka edellisellä kerralla ostivat A-paketin 90% ostaa seuraavallakin kerralla A-paketin ja 10% vaihtaa pesuainetta (5% ostaa B-paketin ja 5% ostaa C-paketin). B-pesuaine ei ole yhtä laadukasta kuin A-pesuaine. B-pesuainetta ostaneista 80% pysyy samassa ja 20% vaihtaa merkkiä (10% ostaa A:ta ja 10% ostaa C:tä). C-pesuaine on heikkolaatuisinta. Sen

käyttäjistä vain 50% ostaa samaa pesuainetta seuraavallakin kerralla ja 50% vaihtaa ainetta (25% ostaa A:ta ja 25% ostaa B:tä).

Indeksoidaan tuotteet luonnollisella tavalla: A  $\sim$  1, B  $\sim$  2 ja C  $\sim$  3. Olkoon  $x_{jk}$  tuotteen  $j$  markkinaosuus ”kierroksella”  $k$ . Silloin

$$x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} = 10000, \forall k$$

Markkinaosuuksista saadaan osuusvektori

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}$$

Osuusvektorin odotusarvo kierroksella  $k + 1$  saadaan siirtymä-todennäköisyyksien perusteella lausekkeesta

$$\vec{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{1;k+1} \\ x_{2;k+1} \\ x_{3;k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix}}_{=P} \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} = P\vec{x}_k$$

Pesuaine A on juuri tullut myyntiin ja lähtötilanteen osuusjakauma on  $\vec{x}_0 = (0 \quad 7000 \quad 3000)^T$ . Laske pesuaineen A markkinaosuus kierroksilla  $1, \dots, 5$ . (Jos et laske käsin vaan käytät laskemiseen exceliä, niin laske odotusarvot pidemmälle aikajaksolle,  $k = 1, \dots, 100$ .)

7. Mikä on tehtävässä 6 kuvattujen markkinoiden tasapainojakauma  $\vec{x}^*$

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}, \text{ kun } k \rightarrow \infty$$

Ohje: Tasapainojakauma toteuttaa yhtälöt

$$\begin{cases} P\vec{x}^* = \vec{x}^* \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* = 10000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,90x_1^* + 0,10x_2^* + 0,25x_3^* = x_1^* \\ 0,05x_1^* + 0,80x_2^* + 0,25x_3^* = x_2^* \\ 0,05x_1^* + 0,10x_2^* + 0,50x_3^* = x_3^* \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* = 10000 \end{cases}$$

8. Olkoon A-pesuaineen valmistajan saama kate 0,40€/paketti. Oletamme nyt, että yksi kierros  $\sim$  yksi kuukausi. Kuukausijaksoon liittyvä laskentakorkokanta on  $i = 0,01$ .

a) Mikä on ensimmäisen vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto (ei diskontata)

$$\sum_{k=1}^{12} 0,40 \cdot x_{1k}$$

b) Mikä on vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto sen jälkeen, kun tasapaino on saavutettu (ei diskontata)

$$12 \cdot 0,40 \cdot x_1^*$$

Mitä kampanjasta enintään kannattaa maksaa?