Vaasan yliopisto, kevät 2014

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

4. harjoitus, viikko 7 (10.–14.2.2014)

R1	ma	10–12	D115	R5	ti	14–16	B209
R2	ma	14–16	F140	R6	to	12–14	C209
R3	ti	08–10	A201	R7	pe	08–10	A201
R4	ti	12–14	D218	R8	pe	10–12	D115

1. a) Laske 3.15% todelliseen vuosikorkoon liittyvä kuukausikorkokanta.
b) Mikä on todellinen vuosikorko, kun kuukausikorkokanta on 0.00412525?

Solution: a)

a)
$$\begin{aligned} (1+i_{month})^{12} &= 1+i_{year} \\ (1+i)^{12} &= 1{,}0315 \\ \Leftrightarrow 1+i &= 1{,}0315^{1/12} \\ \Leftrightarrow i &= 1{,}0315^{1/12}-1 = 0.0025878471715479 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} (1+i_{month})^{12} &= (1+0{,}00412525)^{12} = 1.050641756 \\ \Rightarrow 1+i_{tod} &= 1.05064 \end{aligned}$$

Answer: a) 0.0025878471715479 b) the true annual rate of return is 5.064%

2. 1.1.2014 yrittäjä ottaa 20 000 euron lainan. Laina-ajaksi sovitaan 18 kuukautta ja lainan todelliseksi vuosikoroksi 6.50%. Yrittäjä ei lyhennä lainaansa eikä maksa korkoja ennen kuin laina-aika on kulunut loppuun 30.6.2015. Silloin hän hoitaa kertamaksulla lainan korkoineen. Miten suureksi laina kasvaa, kun:
(a) Korkojakso on vuosi, ja korko lasketaan yksinkertaisella korkolaskulla.
(b) Korkojakso on kuukausi ja $i = 1{,}0650^{(1/12)} - 1$.
(c) Käytetään jatkuvaa korkolaskua ja korkointensiteetti on $\rho = \ln(1{,}0650)$.

Solution: a)

Date	the loan capital	saldo
1.1.2014	20 000€	= 20 000€
31.12.2014	$20000€ + 0.065 \cdot 20000€$	= 21 300€
30.6.2015	$(1+\frac{6}{12}\cdot 0.065)\cdot 21\,300€$	= 21 992,25€

b)

$$\begin{aligned} K_{18} &= \left((1+i_{month})^{18}\right)\cdot K_0 = \left((1{,}065)^{1/12}\right)^{18}\cdot K_0 \\ &= (1{,}065)^{18/12}\cdot 20000€ = 21\,981{,}35€ \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} K_{1,5} &= \left((1+i_{year})^{2,5}\right)\cdot K_0 \\ &= (1{,}065)^{1,5}\cdot 20000€ = 21\,981{,}35€ \end{aligned}$$

Answer: a) = 21 992,25€, b) 21 981,35€, c) 21 981,35€.

3. Kirjoita seuraavien summien kaikki termit näkyviin ja laske summa sitten sopivalla kaavalla

$$\text{a)}\quad \sum_{k=5}^{25}\left(\frac{1}{5}\cdot 1{,}1^k\right), \qquad\qquad \text{b)}\quad \sum_{k=5}^{25}\left(\frac{1}{5}\cdot 1{,}1\cdot k\right)$$

Solution: a) Geometric sum:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=5}^{25}\left(\frac{1}{5}\cdot 1{,}1^k\right) &= \frac{1}{5}\cdot 1{,}1^5+\frac{1}{5}\cdot 1{,}1^6++\frac{1}{5}\cdot 1{,}1^7+\cdots+\frac{1}{5}\cdot 1{,}1^{25} \\
&= \frac{1}{5}(1{,}1^5+1{,}1^6+1{,}1^7+\cdots+1{,}1^{25})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n &= 25-5+1=21 \\
a_1 &= \frac{1}{5}\cdot 1{,}1^5=0{,}322102 \\
q &= 1{,}1 \\
Sum &= a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}=0{,}322102\cdot\frac{(1-1{,}1^{21})}{(1-1{,}1)}=20{,}6153
\end{aligned}$$

b) Arithmetic sum:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=5}^{25}\left(\frac{1}{5}\cdot 1{,}1\cdot k\right) &= \frac{1}{5}\cdot 1{,}1\cdot 5+\frac{1}{5}\cdot 1{,}1\cdot 6++\frac{1}{5}\cdot 1{,}1\cdot 7+\cdots+\frac{1}{5}\cdot 1{,}1\cdot 25 \\
&= \frac{1}{5}\cdot 1{,}1\cdot(5+6+7+\cdots+25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n &= 25-5+1=21 \\
a_1 &= \frac{1}{5}\cdot 1{,}1\cdot 5=1{,}1 \\
a_n &= \frac{1}{5}\cdot 1{,}1\cdot 25=5{,}5 \\
Sum &= n\cdot\frac{a_1+a_n}{2}=21\cdot\frac{1{,}1+5{,}5}{2}=69{,}3
\end{aligned}$$

4. Opiskelija saa isoisältä taskurahaa 100€ kuukaudessa viiden vuoden ajan. Tulovirta alkaa kahden kuukauden kuluttua opintojen alkaessa. Jos laskenta korko on 4,15% (todellinen vuosikorko), niin tuloviran nykyarvo on

$$NPV_{60} = \sum_{k=3}^{62} \frac{100€}{(1+i)^k} = \frac{a_{60,i}}{(1+i)^2} \cdot 100€, \qquad (1+i)^{12} = 1{,}0415$$

Laske opiskelijan saaman taskuraha-virran nykyarvo.

$$\begin{aligned}
NPV_{60} &= \sum_{k=3}^{62} \frac{100€}{(1+i)^k} \\
&= \frac{100€}{(1+i)^3} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{60}}{1-\frac{1}{1+i}} \\
&= \frac{100€}{(1+i)^2 \cdot i} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+i)^{60}}\right) \\
&= \frac{100€}{1{,}0415^{2/12}[1{,}0415^{1/12}-1]} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1{,}0415^{1/12})^{60}}\right) \\
&= 5383.58€
\end{aligned}$$

another way

$$\begin{aligned}
NPV_{60} &= \frac{a_{60,i}}{(1+i)^2} \cdot 100€ \\
&= \frac{1}{(1+i)^2} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \cdot 100€ \\
&= \frac{1}{(1{,}0415^{1/12})^2} \cdot \frac{(1{,}0415^{60/12}-1)}{[1{,}0415^{1/12}-1]1{,}0415^{60/12}} \cdot 100€ \\
&= 5383.58€
\end{aligned}$$

Answer: The Present Value is 5383.58€.

5. Laske annuiteettilainen tasaerä (kuukausierä), kun lainan määrä on 5000€, todellinen vuosikorko on 6.85% ja laina-aika on 21 kuukautta.

Solution:

$$\begin{aligned}
k &= c_{n;i}K_0 = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot K_0 \\
&= \frac{[1{,}0685^{1/12}-1] \cdot 1{,}0685^{21/12}}{1{,}0685^{21/12}-1} \cdot 5000€ \\
&= 252.86€
\end{aligned}$$

(Check: $21 \cdot 252.86€ = 5310.06$ OK)
Answer: The Person pays 252.86€ in each month (21 times)

6. Laske osamaksuerä, kun käteishinta on 25000€, käsiraha on 5000€, osamaksulisä on 800€. Osamaksuerät maksetaan kuukausittain. Maksuaika on 15 kuukautta ja todellinen vuosikorko on 6,25%.

Solution:

$$\begin{aligned} &\text{price} \quad H = 25\,000€ && n = 15 \\ &\text{deposit} \quad h = 5\,000€ && (1+i) = 1{,}0625^{1/12} \\ &\text{service charge} \quad m = 800€ && i = 1{,}0625^{1/12} - 1 \\ &k = c_{n;i}(H-h+m) && c_{n;i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}(H-h+m) \\ &= \frac{[1{,}0625^{1/12}-1]\cdot 1{,}0625^{15/12}}{(1{,}0625^{15/12}-1)} \cdot (25\,000€ - 5\,000€ + 800€) \\ &= 1\,443{,}51€ \end{aligned}$$

(*Check:* $15 \cdot 1\,443{,}51 = 21\,652{,}65$ OK)

Answer: The hire purchase plan is to pay deposit 5000€ at the beginning and then 1 443,51€ in the end of each month (21 months).

7. Yritys solmii sopimuksen, jonka mukaa yritys maksaa sopimuksen allekirjoituspäivänä 1400€; tämän jälkeen maksetaan vielä kolme kertaa vuoden välein 1000€; ja lisäksi kuukausittaina maksetaan 200€niin, että kuukausimaksut alkavat 4 kuukautta allekirjoittamisen jälkeen ja kuukausieriä maksetaan 30 (2,5 vuotta). Laske maksuvirran nykyarvo, kun laskentakorko (todellinen vuosikorko) on 4,12%.

Solution:

$$(1+i_a) = 1{,}0412, \qquad (1+i_m) = 1{,}0412^{1/12}.$$

$$\begin{aligned} NPV &= 1400€ + \sum_{k=1}^{3} \frac{1\,000€}{(1+i_a)^k} + \sum_{t=5}^{34} \frac{200€}{(1+i_m)^t} \\ &= 1400€ + \frac{1000€}{1{,}0412} + \frac{1000€}{1{,}0412^2} + \frac{1000€}{1{,}0412^3} + \frac{200€}{1{,}0412^{5/12}} \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{1{,}0412^{1/12}}\right)^{30}\right)}{\left(1 - \frac{1}{1{,}0412^{1/12}}\right)} \\ &= 1400€ + \frac{1000€}{1{,}0412} + \frac{1000€}{1{,}0412^2} + \frac{1000€}{1{,}0412^3} + \frac{200€}{1{,}0412^{4/12}} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{1{,}0412^{30/12}}\right)}{(1{,}0412^{1/12}-1)} \\ &= 1\,400€ + 2\,768.7827€ + 5\,621{,}3726€ = 9\,790{,}16€ \end{aligned}$$

Kaavoja:

$$\begin{aligned}
& \text{yksinkertainen korkolasku:} \\
K_t &= (1+it)K_0 = (1+\frac{p}{100}t)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1 \\
& \text{koronkorkolasku:} \\
K_t &= (1+i)^t K_0, \text{ kun } t = 1,2,3,\ldots \\
& \text{jatkuva korkolasku:} \\
K_t &= (1+i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1+i) = e^{\rho}
\end{aligned}$$

Jaksolliset suoritukset

$$\begin{aligned}
\text{prolongointitekijä } s_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\
\text{diskonttaustekijä } a_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \\
\text{kuoletuskerroin } c_{n,i} &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}
\end{aligned}$$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\begin{aligned}
\text{annuiteetti } k &= c_{n,i} K_0 \\
\text{osamaksuerä } k &= c_{n,i}(H - h + m)
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$