Vaasan yliopisto, kevät 2015

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

Opettaja: Matti Laaksonen

1. välikoe perjantaina 27.3.2015 **A**

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja.

A1. Laske integraalit

$$\text{a)}1 \quad \int (2x^3 - 6x + 5)\,dx, \qquad \text{b)} \quad \int_1^3 (4 + 2x - 6x^2)\,dx$$

A2. Ratkaise LP-malli

$$\begin{array}{lrcrcr} \max z = & x_1 & + & 4x_2 & & \\ \text{ehdoin} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 14 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 & & & \geq & 2 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

A3. a) (4p) Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ \quad\;\; y - z = -2 \\ 2x - 5y + z = 4 \end{cases}$$

b) (2p) Cramerin kaavat? (Milloin niitä voi käyttää? Milloin niitä kannattaa käyttää?)

A4. Olkoon

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Laske $\det(\boldsymbol{M})$, $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}$ ja $\mathbf{M}^{-1}$.

A5. Erään tuotekorin osalta tiedetään vuosien 2000 ja 2010 hinnat ja ostojen määrät. Perusajankohta on nyt 2000 ja vertailuajankohta 2010

	2000		2010	
tuote	p_0	q_0	p_t	q_t
1	10,00	200	15,00	300
2	2,00	500	8,00	100
3	30,00	20	15,00	100

a) Laske Laspeyres'in ja Paashenin hintaindeksit.

b) Mikä selittää indeksien suuren eron?

Korkolasku:

$$\begin{aligned}
K_t &= (1+it)K_0 = (1+\frac{p}{100}t)K_0, \text{ kun } 0<t<1 \\
K_t &= (1+i)^t K_0, \text{ kun } t = 1,2,3,\ldots \\
K_t &= (1+i)^t K_0 = e^{\rho t}K_0, \text{ kun } t>1 \text{ ja } (1+i) = e^{\rho}
\end{aligned}$$

Jaksolliset suoritukset

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n-1}{i}, \qquad a_{n,i} = \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}, \qquad c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\begin{aligned}
\text{annuiteetti } k &= c_{n,i}K_0 \\
\text{osamaksuerä } k &= c_{n,i}(H-h+m)
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1+(k-1)d) = n\cdot\frac{(a_1+a_n)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Matriisikaavoja $(n\times n)$ neliöatriisille $\mathbf{A} = (a_{ij})$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det(\mathbf{A}_{ik}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}\det(\mathbf{A}_{kj})$$

missä $\det(\mathbf{A}_{rs})$ on alkioon a_{rs} liittyvä minori

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = (\alpha_{ij})$$

missä $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ji})$ on alkioon a_{ji} liittyvä kofaktori

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\operatorname{adj}(\mathbf{A})$$

Cramerin kaavat:

$$x_j = D_j/D$$

Indeksejä

Laspeyres $\quad P^L_{t_0;t} = \dfrac{\sum_i p_{t;i}q_{t_0;i}}{\sum_i p_{t_0;i}q_{t_0;i}}\cdot 100, \qquad Q^L_{t_0;t} = \dfrac{\sum_i q_{t;i}p_{t_0;i}}{\sum_i q_{t_0;i}p_{t_0;i}}\cdot 100$

Paaschen $\quad P^P_{t_0;t} = \dfrac{\sum_i p_{t;i}q_{t;i}}{\sum_i p_{t_0;i}q_{t;i}}\cdot 100, \qquad Q^P_{t_0;t} = \dfrac{\sum_i q_{t;i}p_{t;i}}{\sum_i q_{t_0;i}p_{t;i}}\cdot 100$

Vaasan yliopisto, kevät 2015

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

Opettaja: Matti Laaksonen

A

1. välikoe perjantaina 27.3.2015

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja.

A1. Laske integraalit

a) $\int (2x^3 - 6x + 5)dx,$ b) $\int_1^3 (4 + 2x - 6x^2)dx$

a) $\int (2x^3 - 6x + 5 \, dx = \frac{2}{4}x^4 - \frac{6}{2}x^2 + 5x + C$

$= \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 5x + C$

b) $\int_1^3 (4 + 2x - 6x^2) \, dx$

$= \Big/_1^3 (4x + x^2 - 2x^3)$

$= (4\cdot 3 + 3^2 - 2\cdot 3^3) - (4\cdot 1 + 1^2 - 2\cdot 1^3)$

$= (12 + 9 - 54) - (4 + 1 - 2)$

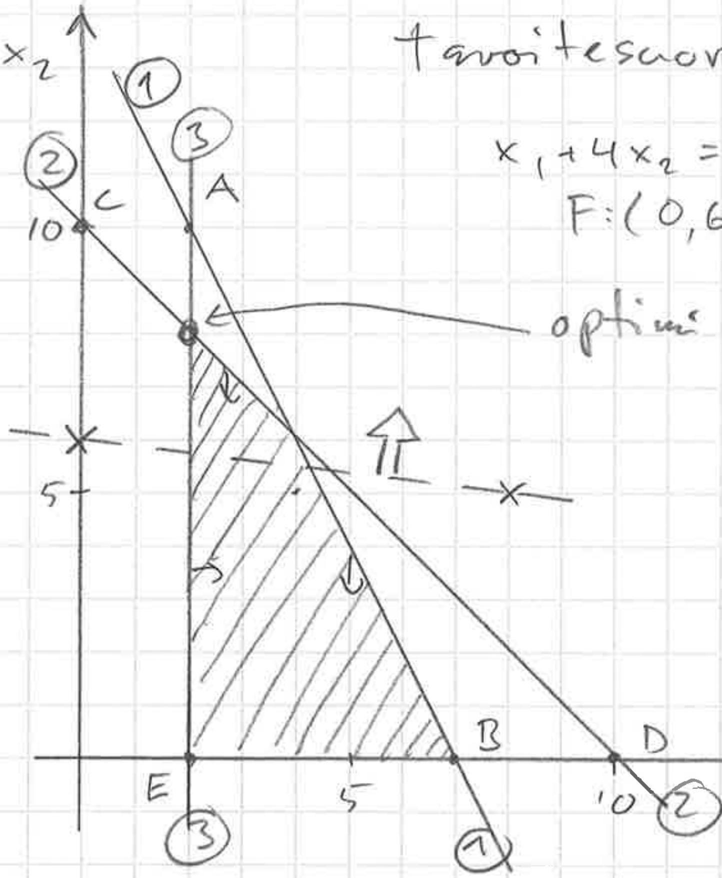
$= -23 - 3 = -26$

Vastaus a) $\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 5x + C$ b) -26

A2. Ratkaise LP-malli

$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & x_1 + 4x_2 \\
\text{ehdoin} \quad & 2x_1 + x_2 \le 14 \\
& x_1 + x_2 \le 10 \\
& x_1 \ge 2 \\
& x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

1. rajoite: $2x_1 + x_2 \le 14$ $\downarrow$ A: (2, 10), B: (7, 0)
2. rajoite: $x_1 + x_2 \le 10$ $\downarrow$ C: (0, 10), D: (10, 0)
3. rajoite $x_1 \ge 2$ $\rightarrow$ E: (2, 0)



tavoitesuora

$x_1 + 4x_2 = 24$

F: (0, 6), G: (8, 4)

$$\begin{cases} (2) \\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 8 \\ z = 2 + 4 \cdot 8 = 34 \end{cases}$$

Vast: Optimissa $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 8 \\ z = 34 \end{cases}$

A3. a) (4p) Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ \quad\;\; y - z = -2 \\ 2x - 5y + z = 4 \end{cases}$$

b) (2p) Cramerin kaavat? (Milloin niitä voi käyttää? Milloin niitä kannattaa käyttää?)

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 3 & (1) \\ \quad\;\; y - z = -2 & (2) \\ \quad\;\; -2z = -4 & (3) \end{cases}$$

$(3) \longrightarrow \underline{z = 2}$

$(2) \longrightarrow y - 2 = -2$

$\underline{y = 0}$

$(1) \longrightarrow x - 2\cdot 0 + 2 = 3$

$\underline{x = 1}$

b) Yhtälöryhmän $A\bar{x} = \bar{b}$ ratkaisussa k:nnen muuttujan arvo on

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \text{ missä}$$

D_k = apudeterminantti, jossa A:n k:s sarake on korvattu $\bar{b}$:llä

$D = \det(A)$

Cramerin kaavoja voi käyttää, jos $D \neq 0$

" " kannattaa käyttää, jos yhtälöryhmän kertoimien kohdalla on mallin kirjainvakioita. Muut yhtälöryhmän ratkaisumenetelmät ovat silloin vaativia, mutta Cramerin kaavojen determinantit on helppo laskea.

A4. Olkoon

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Laske $\det(\boldsymbol{M})$, $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}$ ja $\mathbf{M}^{-1}$.

a)
$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) + (0 \cdot 1 - (-1) \cdot 2) + 4 (0 \cdot 1 - 1 \cdot 2)$$
$$= 2 + 2 - 8 = -4$$

b)
$$Q^T M Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$$

c)
$$m_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad m_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad m_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$
$$m_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad m_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad m_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$
$$m_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad m_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{21} & m_{31} \\ -m_{12} & m_{22} & -m_{32} \\ m_{13} & -m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} (2) & -(-5) & (-3) \\ -(2) & (-7) & -(-1) \\ (-2) & -(3) & (1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}50 & -1{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}50 & 1{,}75 & -0{,}25 \\ 0{,}50 & 0{,}75 & -0{,}25 \end{pmatrix}$$

(II tapa) A4

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot -2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 1 \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0{,}50 & -1{,}25 & 0{,}75 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}50 & 1{,}75 & -0{,}25 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}50 & 0{,}75 & -0{,}25 \end{array}\right) \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}50 & -1{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}50 & 1{,}75 & -0{,}25 \\ 0{,}50 & 0{,}75 & -0{,}25 \end{pmatrix}$$

A5. Erään tuotekorin osalta tiedetään vuosien 2000 ja 2010 hinnat ja ostojen määrät. Perusajankohta on nyt 2000 ja vertailuajankohta 2010

	2000		2010	
tuote	p_0	q_0	p_t	q_t
1	10,00	200	15,00	300
2	2,00	500	8,00	100
3	30,00	20	15,00	100

a) Laske Laspeyres'in ja Paashenin hintaindeksit.
b) Mikä selittää indeksien suuren eron?

a) $$P^L = \frac{15 \cdot 200 + \boxed{8 \cdot 500} + 15 \cdot 20}{10 \cdot 200 + \boxed{2 \cdot 500} + 30 \cdot 20} \cdot 100 = 203$$

$$P^P = \frac{\boxed{15 \cdot 300} + 8 \cdot 100 + 15 \cdot 100}{\boxed{10 \cdot 300} + 2 \cdot 100 + 30 \cdot 100} \cdot 100 = 110$$

b) Laspeyresissa saa nyt suurimman painon tuote #2 jonka hinta nelinkertaistui
→ iso indeksi
Paashenissa saa nyt suurimman painon tuote #1 jonka hinta nousi vain 50%
→ ei niin iso indeksi