

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

2. harjoitus, viikko 4 (25.-29.1.2016)

R1	ma	10-12	F455	R5	ti	14-16	F455
R2	ma	14-16	F455	R6	to	12-14	F455
R3	ti	08-10	F455	R7	pe	08-10	F455
R4	ti	12-14	F455	R8	pe	10-12	F455

1. Ratkaise epäyhtälöt

a) $x - 1 \leq 3x + 1$ b) $3(x + 1) \geq 5(x - 1)$ c) $x^2 - 3 \geq 2x$

d) Ratkaise yhtälö

$$1.015^x = 1.25$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x - 1 \leq 3x + 1 \\ & \Leftrightarrow x - 3x \leq 1 + 1 \\ & \Leftrightarrow -2x \leq 2 \quad \| : (-2) \\ & \Leftrightarrow x \geq -1 \end{aligned}$$

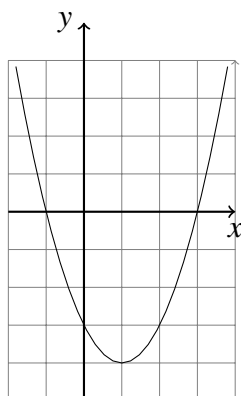
$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 3(x + 1) \geq 5(x - 1) \\ & \Leftrightarrow 3x + 3 \geq 5x - 5 \\ & \Leftrightarrow -2x \geq -8 \quad \| : (-2) \\ & \Leftrightarrow x \leq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & x^2 - 3 \geq 2x \\ & \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2x - 3}_{=f(x)} \geq 0 \end{aligned}$$

Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli ja funktion nollakohdat ovat

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} \\ \rightarrow \quad x_1 &= -1 \quad \text{ja} \quad x_2 = 3. \end{aligned} \tag{1}$$

Funktion kuvaaja on siis seuraavan näköinen



$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Kuvasta näemme, että

$$f(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -1 \quad \text{tai} \quad x \geq 3$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad 1,015^x &= 1,25 \\ \Leftrightarrow \ln(1,015^x) &= \ln(1,25) \\ \Leftrightarrow x \cdot \ln(1,015) &= \ln(1,25) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\ln(1,25)}{\ln 1,015} \approx 14,98753167 \approx 15,0 \end{aligned} \quad (2)$$

Tarkistus:

$$1,015^{14,98753} = 1,249999969 \quad \text{OK!}$$

Vastaus: a) $x \geq -1$, b) $x \leq 4$, c) $x \leq -1$ tai $x \geq 3$, d) $x \approx 15,0$.

2. Piirrä funktion $f: [0,4] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + \frac{1}{x-3}$ kuvaaja.

(Vihje: Huomaa, että funktio on määritelty välillä $0 \leq x \leq 4$.

Voit kokeilla sivustolta ”<http://www.wolframalpha.com/>” löytyvää työkalua. Anna syöteköntään komento: `plot x^2+1/(x-3)` Lisää esimerkkejä löydät verkkosivulta: ”<http://www.wolframalpha.com/examples/Math.html>”)

Ratkaisu:



plot x^2+1/(x-3), x=0..4

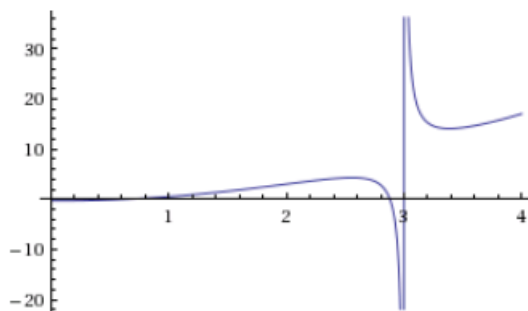


Examples Random

Input interpretation:

plot	$x^2 + \frac{1}{x-3}$	$x = 0$ to 4
------	-----------------------	----------------

Plot:



Enable interactivity

3. Laske derivaatat seuraaville funktioille

$$\text{a) } f(x) = 3x^3 + 5x^2 \quad \text{b) } g(x) = 2(3x^2 - 4x + 7) \quad \text{c) } h(x) = (x + 5)^2$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= 3x^3 + 5x^2 \\ \Rightarrow f'(x) &= 9x^2 + 10x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } g(x) &= 2(3x^2 - 4x + 7) \\ &= 6x^2 - 8x + 14 \\ \Rightarrow g'(x) &= 12x - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } h(x) &= (x + 5)^2 \\ &= x^2 + 10x + 25 \\ \Rightarrow h'(x) &= 2x + 10 \end{aligned}$$

4. Tuotteen A valmistuskustannus $C_a(q)$ (€/k) on valmistusmäärän q (kpl/kk) funktio siten, että

$$C_a(q) = 25 + 2.3q + 0.002q^2.$$

Kustannusfunktion derivaattaa sanomme rajakustannukseksi

$$MC_a(q) = \frac{d}{dq}C_a(q) = \frac{d}{dq}(25 + 2.3q + 0.002q^2)$$

Laske a) $C_a(100)$, b) $MC_a(q)$, c) $MC_a(100)$ ja d) piirrä kustannusfunktion $C_a(q)$ ja rajakustannusfunktion $MC_a(q)$ kuvaajat, kun $0 < q < 100$.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} \text{a) } C_a(q) &= 25 + 2.3q + 0.002q^2 \\ \Rightarrow C_a(100) &= 25 + 2.3 \cdot 100 + 0.002 \cdot 100^2 = 275 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } MC_a(q) &= \frac{d}{dq}(25 + 2.3q + 0.002q^2) \\ &= 2.3 + 0.004q \end{aligned}$$

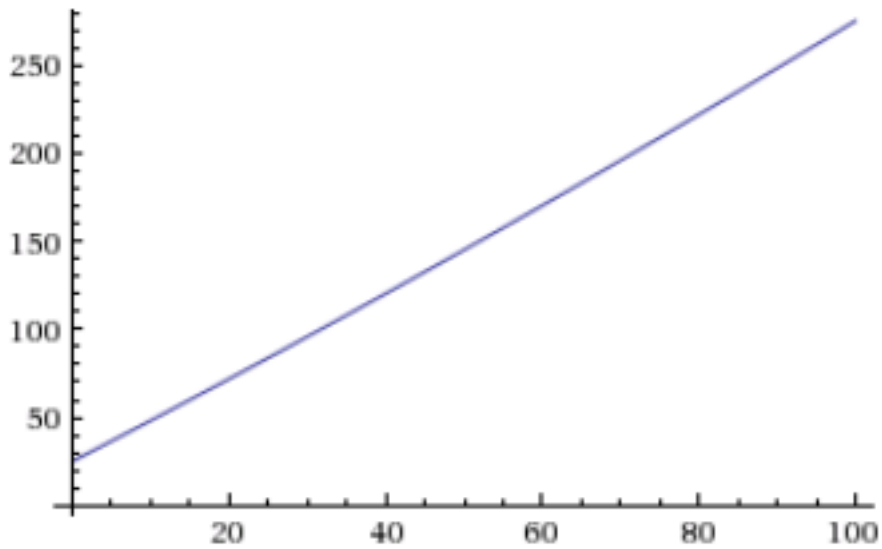
$$\begin{aligned} \text{c) } MC_a(q) &= 2.3 + 0.004q \\ \Rightarrow MC_a(100) &= 2.3 + 0.004 \cdot 100 = 2.7 \end{aligned}$$

d)

Input interpretation:

plot	$25 + 2.3q + 0.002q^2$	$q = 0 \text{ to } 100$
------	------------------------	-------------------------

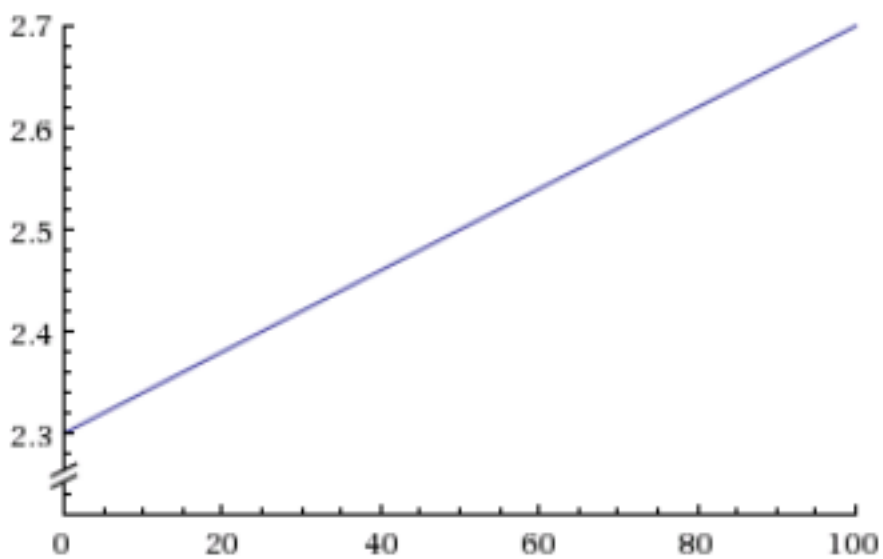
Plot:



Input interpretation:

plot	$2.3 + 0.004q$	$q = 0 \text{ to } 100$
------	----------------	-------------------------

Plot:



5. Funktiosta $f(x)$ tiedetään arvot $f(0.25) = 1.34$ ja $f(0.40) = 1.52$. Arvioi lineaarisen interpoloinnin avulla funktion arvoa kohdassa $x = 0.30$.

Ratkaisu: Alkuarvot:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0.25 & f(x_0) = 1.34 \\ x_1 = 0.40 & f(x_1) = 1.52 \\ x = 0.30 & f(x) = ? \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}(f(x_1)-f(x_0)) \\ &= 1,34 + \frac{0,30-0,25}{0,40-0,25}(1,52-1,34) = 1,40 \end{aligned}$$

Vastaus: $f(0,30) \approx 1,40$.

6. Maatalousyrittäjä kasvattaa marjoja kasvihuoneessa. Marjat myydään tuoreina kuluttajille. Hinta määräytyy kunkin viikon tuotantomäärästä. Kun viikon tuotantomäärä oli 520 kg/vko, niin hinta asettui tasolle 15,00 €/kg. Kun viikon tuotantomäärä oli 300 kg/vko, niin hinta asettui tasolle 17,00 €/kg. Määritä interpoloimalla se kysyntä funktio $p = p(q)$, jota yrittäjän kannattaa käyttää toimintansa suunnittelussa.

Ratkaisu: Alkuarvot:

$$\begin{array}{ll} x_0 \leftarrow q_0 = 520 \text{ kg/vko} & f(x_0) \leftarrow p_0 = 15.00 \text{ €/kg} \\ x_1 \leftarrow q_1 = 300 \text{ kg/vko} & f(x_1) \leftarrow p_1 = 17.00 \text{ €/kg} \\ x \leftarrow q & f(x) \leftarrow p(q) \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0) \\ \rightarrow p(q) &\approx p_0 + \frac{p_1-p_0}{q_1-q_0}(q-q_0) \\ &= 15.00 + \frac{17.00-15.00}{300-520}(q-520) \\ &= 15.00 - \frac{2}{220}(q-520) \\ &= 15.00 - 0,009091q + 4,727 \\ &= 19.73 - 0,009091q \end{aligned}$$

Vastaus: $p = 19.73 - 0,009091q$.