Vaasan yliopisto, kevät 2016

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

3. harjoitus, viikko 5 (1.–5.2.2016)
Malliratkaisut

1. Yrityksen erään tuotelinjan kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.030q$ ja vastaava kustannusfunktio on $C(q) = 0.02q^2 + 5q + 150$. Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen. Mikä on maksimivoitto?

*Ratkaisu:*Selvitetään ensin rajatuotto ja rajakustannus:

$$\begin{aligned} p &= 20 - 0{,}030q \\ \rightarrow R &= 20q - 0{,}030q^2 \\ \rightarrow MR &= 20 - 0{,}06q \end{aligned}$$	$$\begin{aligned} C &= 0{,}02q^2 + 5q + 150 \\ \rightarrow MC &= 0{,}04q + 5 \end{aligned}$$

Optimissa:

$$\begin{aligned} MC &= MR \\ \Leftrightarrow 0{,}04q + 5 &= 20 - 0{,}06q \\ \Leftrightarrow 0{,}1q + 5 &= 15 \qquad || * 10 \\ \Leftrightarrow q_{opt} &= 150 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{opt} &= P(150) = R(150) - C(150) \\ &= (20 \cdot 150 - 0{,}030 \cdot 150^2) - (0{,}02 \cdot 150^2 + 5 \cdot 150 + 150) \\ &= 975 \end{aligned}$$

Vastaus: Voitto on suurin mahdollinen, kun valmistetaan 150 tuotetta jaksossa ja voitto on silloin 975€/jakso.

2. Tehdas valmistaa viikossa tuotetta määrän q ja myy sen hintaan p (euroa/tuote). Kysyntäfunktio on $p(q) = 5 - 0.01q$. Tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 1,5 euroa/tuote ja valmistusmäärästä riippumaton kiinteä kustannus on 230 euroa/viikko. Yrityksen tuotantokapasiteetti on 150 tuotetta/viikko. Yritys voi ylittää kapasiteettinsa, jos se teettää kapasiteetin ylittävän osan tuotteista ylityönä. Ylityönä tehdyn tuotteen valmistuskustannus on 1,6 euroa/tuote. Jos ylityötä tehdään on kiinteä kustannus 250 euroa/viikko. Millä valmistusmäärällä yritys nyt saa suurimman voiton (voitto = myyntitulo – kustannukset)?

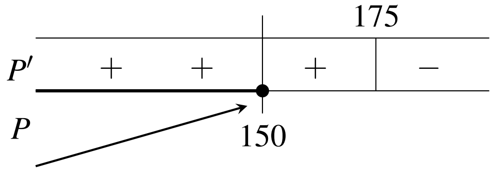
*Ratkaisu:*Selvitetään ensin tuotto ja kustannus:

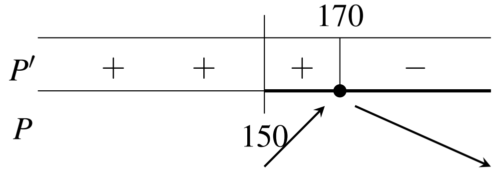
$$\begin{aligned} p &= 5 - 0{,}01q \\ \rightarrow R &= 5q - 0{,}01q^2 \end{aligned}$$	$$\begin{aligned} C &= \begin{cases} 1{,}5q + 230, & \text{kun } q \leq 150 \\ 1{,}5 \cdot 150 + 1{,}6 \cdot (q - 150) + 250, & \text{kun } q > 150 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1{,}6q + 230, & \text{kun } q \leq 150 \\ 1{,}6q + 235, & \text{kun } q > 150 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(q) = R(q) - C(q) = (5q - 0{,}01q^2) - \begin{cases} 1{,}5q + 230, & q \leq 150 \\ 1{,}6q + 235, & q > 150 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 3{,}5q - 0{,}01q^2 - 230, & q \leq 150 \\ 3{,}4q - 0{,}01q^2 - 235, & q > 150 \end{cases}$$

Tutkitaan voittofunktion kulkua erikseen tapauksessa $q \leq 150$ ja ja erikseen tapauksessa $q > 150$.

$q \leq 150$	$q > 150$
$P(q) = 3{,}5q - 0{,}01q^2 - 230$	$P(q) = 3{,}4q - 0{,}01q^2 - 235$
$\rightarrow P'(q) = 3{,}5 - 0{,}02q$	$\rightarrow P'(q) = 3{,}4 - 0{,}02q$
$P' = 0 \Leftrightarrow q = 175$	$P' = 0 \Leftrightarrow q = 170$





$\boxed{\text{Tapaus } q \leq 150}$ Voittofunktio $P(q)$ on kasvava koko välillä $0 \leq q \leq 150$, joten suurin voitto tällä välillä tehdään, kun valmistetaan 150 tuotetta viikossa.
$\boxed{\text{Tapaus } q > 150}$ Voittofunktio $P(q)$ on kasvava valmistusmäärään $q = 170$ saakka ja sen jälkeen voittofunktio on vähenevä. Jos siis tehdään ylityötä ($q > 150$), niin suurin voitto saadaan, kun valmistetaan 170 tuotetta viikossa.
Näistä kahdesta 'tapaus-optimista' pitää nyt vielä valita parempi. Sitä varten lasketaan voitot kummassakin tapauksessa.

$$P(150) = 3{,}5 \cdot 150 - 0{,}01 \cdot 150^2 - 230 = 70 \quad \text{(parempi)}$$
$$P(170) = 3{,}4 \cdot 150 - 0{,}01 \cdot 150^2 - 235 = 54$$

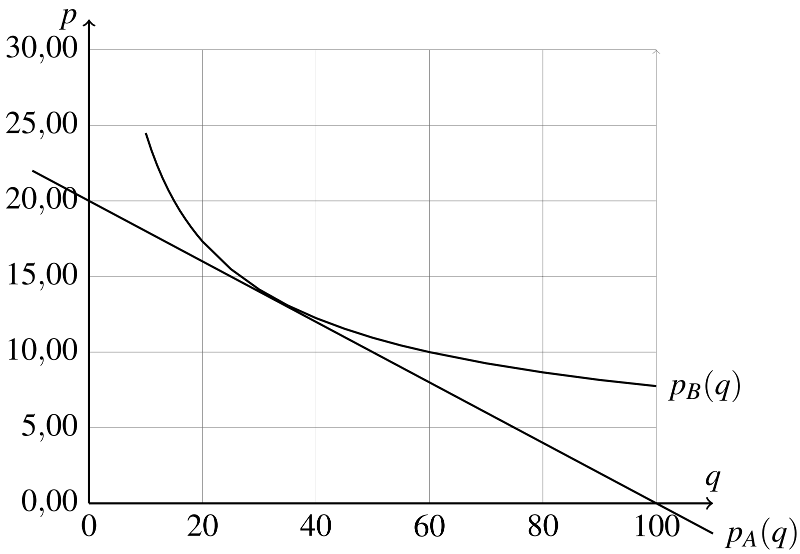
Vastaus: Voitto on suurin mahdollinen, kun valmistetaan 150 tuotetta viikossa. (Ei siis tehdä ylityötä.)

3. Tuotteen A kysyntäfunktio on $p_A = 20 - 0.2q_A$ ja tuotteen B kysynnän ja hinnan välistä yhteyttä kuvaa yhtälö $q_B = 6000/p_B^2$.
a) Piirrä kummankin tuotteen kysyntäfunktion kuvaaja muodossa $p = f(q)$.
b) Laske kummankin tuotteen kysynnän hintajousto, kun $q_1 = 20$, $q_2 = 21$.
c) Laske kummankin tuotteen kysynnän hintajousto, kun $q_1 = 80$, $q_2 = 81$.

$$\text{kysynnän hintajousto} = \frac{(q_2 - q_1)}{(p_2 - p_1)} \cdot \frac{p_1}{q_1}, \quad p_1 = f(q_1), p_2 = f(q_2)$$

Ratkaisu: a)

$\begin{aligned} p_A &= 20 - 0{,}2q \\ &= f_A(q) \end{aligned}$	$\begin{aligned} q_B &= \frac{6000}{p_B^2} \\ \Leftrightarrow p_B^2 &= \frac{6000}{q_B} \\ \leftrightarrow p_B &= \sqrt{\frac{6000}{q}} = f_B(q) \end{aligned}$



b)

$$\left.\begin{aligned} p_A(20) &= 20 - 0{,}2 \cdot 20 = 16{,}00e \\ p_A(21) &= 20 - 0{,}2 \cdot 21 = 15{,}80e \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta p_A = -0.20e$$

$$\text{kh-jousto}_A(20) = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{+1}{-0.20€} \cdot \frac{16{,}0€}{20} = -4{,}0$$

$$\left.\begin{aligned} p_B(20) &= \sqrt{6000/20} = 17{,}3205e \\ p_B(21) &= \sqrt{6000/21} = 16{,}9031e \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta p_B = -0.417e$$

$$\text{kh-jousto}_B(20) = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{+1}{-0.417€} \cdot \frac{17{,}32€}{20} = -2{,}1$$

c)

$$\left.\begin{aligned} p_A(80) &= 20 - 0{,}2 \cdot 80 = 4{,}00e \\ p_A(81) &= 20 - 0{,}2 \cdot 81 = 3{,}80e \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta p_A = -0.20e$$

$$\text{kh-jousto}_A(80) = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{+1}{-0.20€} \cdot \frac{4{,}0€}{80} = -0{,}25$$

$$\left.\begin{aligned} p_B(80) &= \sqrt{6000/80} = 8{,}6603e \\ p_B(81) &= \sqrt{6000/81} = 8{,}6066e \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta p_B = -0.0537e$$

$$\text{kh-jousto}_B(80) = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{+1}{-0.0537€} \cdot \frac{8{,}6603€}{80} = -2{,}0$$

4. Erään tuotteen kysynnän hintajousto on $-1{,}75$. Tuotteen hinta on nyt 12,50€/kpl ja sen kysyntä on 1 200kpl/kk.
a) Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen hintaa lasketaan yhdellä eurolla?
b) Miten muuttuu myyntitulo, jos tuotteen hintaa lasketaan yhdellä eurolla?
c) Tuotteen rajakustannus on 8,00€/kpl. Kannattaako laskea myyntihintaa eurolla?

Ratkaisu: a)

$$\left.\begin{array}{rcl} p &=& 12{,}50\,€/\text{kpl} \\ \Delta p &=& -1{,}00\,€/\text{kpl} \\ q &=& 1200\,\text{kpl/kk} \\ \Delta q &=& x \\ \text{jousto} &=& -1{,}75 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{rcl} \dfrac{\Delta q}{\Delta p}\cdot\dfrac{p}{q} &=& jousto \\ \dfrac{x}{-1\,€/\text{kpl}}\cdot\dfrac{12{,}50\,€/\text{kpl}}{1200\,\text{kpl/kk}} &=& -1{,}75 \\ x &=& \dfrac{-1{,}75\cdot(-1)\cdot 1200\,\text{kpl/kk}}{12{,}50} \\ &=& 168\,\dfrac{\text{kpl}}{\text{kk}} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{llcrcr} \text{alussa} & R_1 &=& 12{,}50\,\dfrac{€}{\text{kpl}}\cdot 1200\,\dfrac{\text{kpl}}{\text{kk}} &=& 15\,000\,\dfrac{€}{\text{kk}} \\ \text{alennuksen jälkeen} & R_2 &=& 11{,}50\,\dfrac{€}{\text{kpl}}\cdot 1368\,\dfrac{\text{kpl}}{\text{kk}} &=& 15\,732\,\dfrac{€}{\text{kk}} \\ \hline \text{muutos} & & & \Delta R = R_2 - R_1 &=& 732\,\dfrac{€}{\text{kk}} \end{array}$$

c) Nyt $MC = 8{,}00\,€/\text{kpl}$ (annettu tehtävässä) ja

$$MR = p\left(1+\frac{1}{kh\,jousto}\right) = 12{,}50\,\frac{€}{\text{kpl}}\left(1+\frac{1}{-1{,}75}\right) = 5{,}36\,\frac{€}{\text{kpl}}$$

Koska $MR < MC$, tuotantoa ei kannata laajentaa $\rightarrow$ hintaa ei kannata laskea.

Vastaus: a) Myynti lisääntyy 168 tuotetta kuukaudessa, b) myyntitulo (tuotto) kasvaa 732 euroa kuukaudessa, c) hinnan alnnus ei kannata, koska kustannukset kasvavat enemmän kuin tuotot.

5. Yritys valmistaa tuotteita ja myy ne kappalehintaan 25 euroa. Rajakustannus on 6 euroa/tuote ja kysynnän hintajousto on $\eta = -1.2$. Kannattaako yrityksen laajentaa vai supistaa tuotantoaan? (Ohje: $MR = p(1+\frac{1}{\eta})$.)

Ratkaisu:

$$MR = p\left(1+\frac{1}{kh\,jousto}\right) = 25{,}00\,\frac{€}{\text{kpl}}\left(1+\frac{1}{-1{,}2}\right) = 4{,}17\,\frac{€}{\text{kpl}}$$

Koska $MR < MC$, tuotantoa kannattaa supistaa.

6. Erään tuotteen kysynnän hintajousto on -2.1. Tuotteen hinta on nyt 20.50 €/kpl ja sen kysyntä on 150kpl/kk.
a) Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen yksikköhintaa alennetaan eurolla?
b) Miten muuttuu myyntitulo $R = pq$, kun yksikköhintaa alennetaan eurolla?
c) Kannattaako edellä kuvattu hinnan alentaminen eurolla, jos tuotteen valmistuskustannus on $C(q) = 300 + 12{,}00\cdot q + 0.01\cdot q^2$
d) Voiko saman asian todeta rajatuoton ja rajakustannusten avulla?

Ratkaisu:

$$\left.\begin{aligned} p &= 20{,}50\,€/\text{kpl} \\ \Delta p &= -1{,}00\,€/\text{kpl} \\ q &= 150\,\text{kpl/kk} \\ \Delta q &= x \\ \text{jousto} &= -2{,}1 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \frac{\Delta q}{\Delta p}\cdot\frac{p}{q} &= jousto \\ \frac{x}{-1\,€/\text{kpl}}\cdot\frac{20{,}50\,€/\text{kpl}}{150\,\text{kpl/kk}} &= -2{,}1 \\ x &= \frac{-2{,}1\cdot(-1)\cdot 150\,\text{kpl/kk}}{20{,}50} \\ &= 15{,}4\,\frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \end{aligned}$$

b)

alussa	R_1	$=$	$20{,}50\,\frac{€}{\text{kpl}}\cdot 150\,\frac{\text{kpl}}{\text{kk}}$	$= 3\,075{,}00\,€/\text{kk}$
alennuksen jälkeen	R_2	$=$	$19{,}50\,\frac{€}{\text{kpl}}\cdot 165{,}4\,\frac{\text{kpl}}{\text{kk}}$	$= 3\,225{,}30\,€/\text{kk}$
muutos			$\Delta R = R_2 - R_1$	$= 150{,}30\,€/\text{kk}$

c)

alussa	C_1	$=$	$300 + 12{,}00\cdot 150 + 0{,}01\cdot 150^2$	$= 2\,325{,}00\,€/\text{kk}$
alennuksen jälkeen	C_2	$=$	$300 + 12{,}00\cdot 165{,}4 + 0{,}01\cdot 165{,}4^2$	$= 2\,558{,}37\,€/\text{kk}$
muutos			$\Delta R = R_2 - R_1$	$= 233{,}37\,€/\text{kk}$

voitto alussa	P_1	$=$	$R_1 - C_1 = 3\,075{,}00\,€/\text{kk} - 2\,325{,}00\,€/\text{kk}$	$= 750{,}00\,€/\text{kk}$
voitto alennuksen jälkeen	P_2	$=$	$R_2 - C_2 = 3\,225{,}30\,€/\text{kk} - 2\,558{,}37\,€/\text{kk}$	$= 666{,}93\,€/\text{kk}$
muutos			$\Delta P = P_2 - P_1$	$= -83{,}07\,€/\text{kk}$

Siis hinnan alentaminen ei kannata, koska voitto pienenee.
d)

$$\begin{aligned} C(q) &= 300 + 12{,}00\cdot q + 0.01\cdot q^2 \\ \Rightarrow MC(q) &= 12{,}00 + 0{,}02q \\ \Rightarrow MC(150) &= 12{,}00 + 0{,}02\cdot 150 = 15{,}00\,€/\text{kpl} \end{aligned}$$

$$MR(150) = 20{,}50\,\frac{€}{\text{kpl}}\left(1 + \frac{1}{-2{,}1}\right) = 10{,}74\,€/\text{kpl}$$

Koska $MC > MR$ tuotantoa ei kannata laajentaa $\rightarrow$ hintaa ei kannata laskea.

Kaavoja: **Kysynnän hintajousto:**

$$\frac{\Delta q}{\Delta p}\cdot\frac{p}{q} = \text{jousto}, \qquad MR = p\left(1 + \frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}}\right)$$