

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

4. harjoitus, viikko 6 (8.–12.2.2016)

Malliratkaisut

1. Erään kappaletavaruotteen varaston yksikköylläpito-kustannukset ovat 4,00€ kappaletta ja vuotta kohti. Tilaukustannukset ovat 80,00€ tilauserältä. Kysyntä on tasaisesti 4000 kpl vuodessa. Täydennystoimitukset tapahtuvat ongelmitta, ja varastointitila on rajoittamaton.

a) Miten suuri on optimaalinen tilauserän koko ja miten suuret ovat varastonpidon kokonaiskustannukset, kun puutetta ei sallita?

b) Miten suuri on optimaalinen tilauserän koko ja miten suuret ovat varastonpidon kokonaiskustannukset, kun puute sallitaan ja puutekustannus on 16,00€/kpl/vuosi?

Ratkaisu: a)

$$h = 4,00 \text{ €/kpl/vuosi}$$

$$K = 80,00 \text{ €}$$

$$D = 4000 \text{ kpl/vuosi}$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80,00 \text{ €} \cdot 4000 \text{ kpl/vuosi}}{4,00 \text{ €/kpl/vuosi}}} = 400 \text{ kpl}$$

$$\begin{aligned} TC_0 &= \frac{KD}{q_0} + h \cdot \frac{q_0}{2} = \frac{80,00 \text{ €} \cdot 4000 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}}{400 \text{ kpl}} + 4,00 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{400 \text{ kpl}}{2} \\ &= 800 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 800 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 1600 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \end{aligned}$$

b)

$$s = 16,00 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}}$$

$$q_1 = q_0 \cdot \sqrt{\frac{h+s}{s}} = 400 \text{ kpl} \cdot \sqrt{\frac{4+16}{16}} = 447 \text{ kpl}$$

$$M_1 = q_0 \cdot \sqrt{\frac{s}{h+s}} = 400 \text{ kpl} \cdot \sqrt{\frac{16}{4+16}} = 358 \text{ kpl}$$

$$q_1 - M_1 = 89 \text{ kpl}$$

$$\begin{aligned} TC_1 &= \frac{KD}{q} + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q} \\ &= \left(\frac{80 \cdot 4000}{447} + \frac{358^2 \cdot 4}{2 \cdot 447} + \frac{(447 - 358)^2 \cdot 16}{2 \cdot 447} \right) \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \\ &= (715,88 + 573,44 + 141,76) \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 1431,08 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \end{aligned}$$

Vastaus: a) $q_0 = 400 \text{ kpl}$, $TC_0 = 1600 \text{ €/vuosi}$. b) $q_1 = 447 \text{ kpl}$, $TC_1 = 1431 \text{ €/vuosi}$.

2. Suurpesula tarvitsee 2 500 astiaa tiettyä pesuainetta kuukaudessa. Yksikköylläpitokustannus on 0.5€/astia/vuosi. Tilaukustannukset ovat 75€ tilaukselta. Pesula tilaa ainetta nykyisin 5 000 astian erissä. Miten suureen vuosisäästöön pesulan on mahdollista päästä muuttamalla tilauspolitiikkaansa? Miten tilaukset tällöin tehdään? Onko säästö mielestäsi suuri?

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} D &= 2500 \text{ ast/kk} = 30000 \text{ ast/vuosi} \\ h &= 0,50 \text{ €/ast/vuosi} \\ K &= 75,00 \text{ €} \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned} TC &= \frac{KD}{q} + h \cdot \frac{q}{2} = \frac{75,00 \text{ €} \cdot 30000 \frac{\text{ast}}{\text{vuosi}}}{5000 \text{ ast}} + 0,50 \frac{\text{€}}{\text{ast} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{5000 \text{ ast}}{2} \\ &= 450 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 1250 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 1700 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \end{aligned}$$

Optimisissa

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{2KD}{h} = \frac{2 \cdot 75 \cdot 30000}{0,5} \text{ ast} = 3000 \text{ ast} \\ TC_0 &= \frac{KD}{q_0} + h \cdot \frac{q_0}{2} = \frac{75,00 \text{ €} \cdot 30000 \frac{\text{ast}}{\text{vuosi}}}{3000 \text{ ast}} + 0,50 \frac{\text{€}}{\text{ast} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{3000 \text{ ast}}{2} \\ &= 750 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 750 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 1500 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \end{aligned}$$

Vastaus: Pesula voi säästää 200€/vuosi, jos kerralla tilataan 3000 astiaa. Säästö on $\frac{200}{1700} \cdot 100\% = 11,8\%$ mikä on paljon!

3. Vuodessa raaka-ainevaraston läpi kulkee kappaletavaraa $D = 1600$ kpl. Tilaukustannus on 9€/erä ja varaston ylläpitokustannus on 1.5€/(kuukausi·kpl).

a) Mikä on optimaalinen tilauserän koko, ja miten suuret ovat varastosysteemin vuotuiset kokonaiskustannukset?

b) Raaka-aineen yksikköhinta on 5€/kpl. Raaka-aineen toimittaja tarjoaa määräalennusta, joka on 1% ostohinnasta, kun tilauserä on vähintään 50 kappaletta, ja 3% ostohinnasta, kun tilauserä on vähintään 100 kappaletta. Mikä on nyt optimaalinen tilauserä?

Ratkaisu: a)

$$\begin{aligned} D &= 1600 \text{ kpl/vuosi} \\ K &= 9,00 \text{ €} \\ h &= 1,5 \text{ €/kpl/kk} = 18,0 \text{ €/kpl/vuosi} \end{aligned}$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 16000}{18}} = 40 \text{ kpl}$$

$$TC_0 = \frac{KD}{q_0} + h \cdot \frac{q_0}{2} = \left(\frac{9 \cdot 1600}{40} + 18 \cdot \frac{40}{2} \right) \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}$$

$$= 360 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 360 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 720 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}$$

b) Yksikköhinta ilman alennuksia on $p_0 = 5,00\text{€}/\text{kpl}$. 1%:n alennus ($p_1 = 4,95\text{€}/\text{kpl}$), jos $q \geq 50$. 3%:n alennus ($p_2 = 4,85\text{€}/\text{kpl}$), jos $q \geq 100$. Lasketaan ostoilla täydennetyt vuosikustannukset:

$$\tilde{T}C(q) = \frac{KD}{q} + h \cdot \frac{q}{2} + p \cdot D$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}C(40) &= \left(\frac{9 \cdot 1600}{40} + 18 \cdot \frac{40}{2} + 5,00 \cdot 1600 \right) \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \\ &= (360 + 360 + 8000) \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 8720 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}C(50) &= \left(\frac{9 \cdot 1600}{50} + 18 \cdot \frac{50}{2} + 4,95 \cdot 1600 \right) \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \\ &= (288 + 450 + 7920) \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 8658 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}C(100) &= \left(\frac{9 \cdot 1600}{100} + 18 \cdot \frac{100}{2} + 4,85 \cdot 1600 \right) \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \\ &= (144 + 900 + 7760) \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 8804 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \end{aligned}$$

Vastaus: a) Optimaalinen tilauserä on 40kpl, ja varastosysteemin kokonaiskustannukset ovat silloin 720€/vuosi. b) Määräalennusten tapauksessa tilauseräksi kannattaa valita 50kpl. (Varaston kokonaiskustannus kasvaa 38€/vuosi, mutta sisäänostoista saadaan alennusta 80€/vuosi).

4. a) Laske 5.25% todelliseen vuosikorkoon liittyvä kuukausikorkokanta.
b) Mikä on todellinen vuosikorko, kun kuukausikorkokanta on 0.008125?

Ratkaisu:

$$(1 + i_{\text{kk}})^{12} = 1 + i_{\text{tod}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + i_{\text{kk}} = (1 + i_{\text{tod}})^{1/12}$$

a)

$$\begin{aligned} 1 + i_{\text{kk}} &= (1 + 0,0525)^{1/12} = 1,004273128 \\ \rightarrow i_{\text{kk}} &= 0,004273128 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 1 + i_{\text{tod}} &= (1 + i_{\text{kk}})^{12} = (1 + 0,008125)^{12} = 1,10197722 \\ \rightarrow &\text{ todellinen vuosikorko on } 10,2\% \end{aligned}$$

5. 1.1.2015 yrittäjä otti 20 000 euron lainan. Laina-ajaksi sovitaan 15 kuukautta ja lainan todelliseksi vuosikoroksi 6.50%. Yrittäjä ei lyhennä lainaansa eikä maksa korkoja ennen kuin laina-aika on kulunut loppuun 31.3.2016. Silloin hän hoitaa kertamaksulla lainan korkoineen. Miten suureksi laina kasvaa, kun:
(a) Korkojakso on vuosi, ja korko lasketaan yksinkertaisella korkolaskulla.
(b) Korkojakso on kuukausi ja $i = 1.0650^{(1/12)} - 1$.
(c) Käytetään jatkuvaa korkolaskua ja korkointensiteetti on $\rho = \ln(1.0650)$.

Ratkaisu: a)

pvm	korko	saldo
1.1.2015		20000,00€
31.12.2015	$0,065 \cdot 1 \cdot 20000\text{€} = 1300,00\text{€}$	21300,00€
31.3.2016	$0,065 \cdot \frac{3}{12} \cdot 21300\text{€} = 346,13\text{€}$	21646,13€

b)

$$\begin{aligned}
K_{15} &= (1 + i_{\text{kk}})^{15} \cdot K_0 \\
&= (1,065^{1/12})^{15} \cdot 20000\text{€} \\
&= (1,065^{15/12}) \cdot 20000\text{€} = 21637,99\text{€}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
K_{1,25} &= e^{\rho t} \cdot K_0 \\
&= e^{\ln(1,065) \cdot 1,25} \cdot 20000\text{€} = 21637,99\text{€}
\end{aligned}$$

$$\text{Huom: } \left((e^{\ln(1,065)})^{1,25} \right) \cdot 20000\text{€} = 1,065^{1,25} \cdot 20000\text{€}$$

6. Kirjoita seuraavien summien termit näkyviin ja laske summat sitten sopivalla kaavalla

$$a = \sum_{k=2}^6 \left(\frac{1}{5} \cdot 2^k \right), \quad b = \sum_{k=3}^{25} \frac{100\text{€}}{(1+i)^k}, \quad \text{missä } (1+i)^{12} = 1.0825$$

Ratkaisu: a)

- Ensimmäinen termi $a_1 = \frac{1}{5} \cdot 2^2 = \frac{4}{5} = 0,8$.
- Peräkkäisten termien suhde $q = \left(\frac{1}{5} \cdot 2^3 \right) / \left(\frac{1}{5} \cdot 2^2 \right) = \frac{8}{5} / \frac{4}{5} = 2$
- Termien lukumäärä $n = 6 - 2 + 1 = 5$
- Geometrisen sarjan summa: $\text{Summa} = a_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)}$.

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{5} \cdot 2^2 + \frac{1}{5} \cdot 2^3 + \frac{1}{5} \cdot 2^4 + \frac{1}{5} \cdot 2^5 + \frac{1}{5} \cdot 2^6 \\
&= 0,8 \cdot \frac{(1-2^6)}{(1-2)} = 0,8 \cdot \frac{(1-32)}{(1-2)} = 0,8 \cdot \left(\frac{-31}{-1} \right) = 24,8
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
b &= \frac{100\text{€}}{(1,0825^{1/12})^3} + \frac{100\text{€}}{(1,0825^{1/12})^4} + \dots + \frac{100\text{€}}{(1,0825^{1/12})^{25}} \\
&= \frac{100\text{€}}{1,0825^{3/12}} \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{1,0825^{1/12}} \right)^{23}}{1 - \left(\frac{1}{1,0825^{1/12}} \right)} \right) \\
&= \frac{100\text{€}}{1,0825^{2/12} (1,0825^{1/12} - 1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{1,0825^{23/12}} \right) = 2098,84\text{€} \\
&\left(= \frac{100\text{€}}{(1+i)^2 \cdot i} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+i)^{23}} \right) \right)
\end{aligned}$$

Kaavoja:

Varastomallit:

perusmalli	$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$ $TC_0(q) = \frac{KD}{q} + h \cdot \frac{q}{2}$
puutemalli	$q_1 = q_0 \sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0 \sqrt{\frac{s}{h+s}},$ $TC_1(q) = \frac{KD}{q} + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q}$
tuotantomalli	$q_2 = q_0 \sqrt{\frac{r}{r-D}}, \quad M_2 = q_0 \sqrt{\frac{r-D}{r}},$ $TC_2(q) = \frac{KD}{q} + \frac{hq(r-D)}{2r}$

yksinkertainen korkolasku:

$$K_t = (1 + it)K_0 = \left(1 + \frac{P}{100}t\right)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

koronkorkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0, \text{ kun } t = 1, 2, 3, \dots$$

jatkuva korkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1 + i) = e^{\rho}$$

Prolongointi ja diskonttaus

$$K_n = (1 + i)^n K_0 \quad (\text{prolongointi})$$

$$K_0 = \frac{1}{(1 + i)^n} K_n \quad (\text{diskonttaus})$$

Summakaavat

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$