Vaasan yliopisto, kevät 2016

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

5. harjoitus, viikko 7 (15.–19.2.2016)

R1	ma	10–12	F455	R5	ti	**10–12**	**F119**
R2	ma	14–16	F455	R6	to	12–14	F455
R3	ti	08–10	F455	R7	pe	08–10	F455
R4	ti	12–14	F455	R8	pe	10–12	F455

1. Yritys solmii sopimuksen, jonka mukaa yritys maksaa sopimuksen allekirjoituspäivänä 1400€; tämän jälkeen maksetaan vielä kolme kertaa vuoden välein 1000€; ja lisäksi kuukausittaina maksetaan 200€niin, että kuukausimaksut alkavat 4 kuukautta allekirjoittamisen jälkeen ja kuukausieriä maksetaan 30 (2,5 vuotta). Laske maksuvirran nykyarvo, kun laskentakorko (todellinen vuosikorko) on 4,12%.

Solution:

$$(1+i_a) = 1{,}0412, \qquad (1+i_m) = 1{,}0412^{1/12}.$$

$$\begin{aligned}
NPV &= 1\,400€ + \sum_{k=1}^{3} \frac{1\,000€}{(1+i_a)^k} + \sum_{t=5}^{34} \frac{200€}{(1+i_m)^t} \\
&= 1400€ + \frac{1000€}{1{,}0412} + \frac{1000€}{1{,}0412^2} + \frac{1000€}{1{,}0412^3} + \frac{200€}{1{,}0412^{5/12}} \cdot \frac{\left(1-\left(\frac{1}{1{,}0412^{1/12}}\right)^{30}\right)}{\left(1-\frac{1}{1{,}0412^{1/12}}\right)} \\
&= 1400€ + \frac{1000€}{1{,}0412} + \frac{1000€}{1{,}0412^2} + \frac{1000€}{1{,}0412^3} + \frac{200€}{1{,}0412^{4/12}} \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{1{,}0412^{30/12}}\right)}{(1{,}0412^{1/12}-1)} \\
&= 1\,400€ + 2768.7827€ + 5\,621{,}3726€ = 9\,790{,}16€
\end{aligned}$$

2. Laske tasaerälainen tasaerä (kuukausierä), kun lainan määrä on 5000€, todellinen vuosikorko on 6.85% ja laina-aika on 21 kuukautta.

Solution:

$$\begin{aligned}
k &= c_{n;i}K_0 = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} \cdot K_0 \\
&= \frac{[1{,}0685^{1/12}-1] \cdot 1{,}0685^{21/12}}{1{,}0685^{21/12}-1} \cdot 5000€ \\
&= 252.86€
\end{aligned}$$

(Check: $21 \cdot 252.86€ = 5310.06$ OK)

3. Laske osamaksuerä, kun käteishinta on 25000€, käsiraha on 5000€, osamaksulisä on 800€. Osamaksuerät maksetaan kuukausittain. Maksuaika on 15 kuukautta ja todellinen vuosikorko on 6,25%.

Solution:

$$\begin{array}{rlrl} \text{price} & H = 25\,000€ & & n = 15 \\ \text{deposit} & h = 5\,000€ & & (1+i) = 1{,}0625^{1/12} \\ \text{service charge} & m = 800€ & & i = 1{,}0625^{1/12} - 1 \\ & k = c_{n;i}(H - h + m) & & c_{n;i} = \dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}(H - h + m) \\ &= \frac{[1{,}0625^{1/12} - 1] \cdot 1{,}0625^{15/12}}{(1{,}0625^{15/12} - 1)} \cdot (25\,000€ - 5\,000€ + 800€) \\ &= 1\,443{,}51€ \end{aligned}$$

(*Check:* $15 \cdot 1\,443{,}51 = 21\,652{,}65$ OK)

4. Projektin perusinvestointi on $H = 2800€$. Syntyvän jatkuvan kassavirran voimakkuus on $k = 100$ €/kk. Kassavirta alkaa hetkellä $t_1 = 0$ (vuotta) ja päättyy hetkellä $t_2 = 2{,}5$ (vuotta). Jäännösarvo on $JA = +500€$. Laskentakorkokanta on 6% (p.a.) eli $\rho = \ln(1{,}06)\frac{1}{\text{vuosi}}$. Jatkuvan korkolaskun mukaan projektin NettoNykyArvo on

$$NNA = -H + \int_{t_1}^{t_2} e^{-\rho t} k(t)dt + e^{-\rho t_2} JA = -H + \frac{k}{\rho}(e^{-\rho t_1} - e^{-\rho t_2}) + e^{-\rho t_2} JA.$$

a) Laske NNA, kun ($k = 1200€/\text{vuosi}$, $\rho = \ln(1{,}06)\frac{1}{\text{vuosi}}$, $t_1 = 0\text{vuotta}$ $t_2 = 2{,}5\text{vuotta}$)
b) Laske NNA, kun ($k = 100€/\text{kk}$, $\rho = \ln(1{,}06^{1/12})\frac{1}{\text{kk}}$, $t_1 = 0\text{kk}$ $t_2 = 30\text{kk}$)
c) Mitä voit sanoa sisäisestä korkokannasta?

Ratkaisu:
a)

$$\begin{aligned} NNA &= -H + \frac{k}{\rho}(e^{-\rho t_1} - e^{-\rho t_2}) + e^{-\rho t_2} JA \\ &= -2\,800€ + \frac{1\,200\frac{€}{\text{vuosi}}}{\ln(1{,}06)\frac{1}{\text{vuosi}}} \cdot \left(e^0 - e^{-\ln(1{,}06)\frac{1}{\text{vuosi}} \cdot 2{,}5\text{vuosi}}\right) + \dots \\ &\qquad \dots + e^{-\ln(1{,}06)\frac{1}{\text{vuosi}} \cdot 2{,}5\text{vuosi}} \cdot 500€ \\ &= -2\,800€ + \frac{1\,200€}{\ln(1{,}06)} \cdot \left(1 - \frac{1}{1{,}06^{2{,}5}}\right) + \frac{1}{1{,}06^{2{,}5}} \cdot 500€ = 423{,}95€ \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
NNA &= -H + \frac{k}{\rho}\left(e^{-\rho t_1} - e^{-\rho t_2}\right) + e^{-\rho t_2} JA \\
&= -2\,800€ + \frac{100\frac{€}{\mathrm{kk}}}{\ln(1{,}06^{1/12})\frac{1}{\mathrm{kk}}} \cdot \left(e^0 - e^{-\ln(1{,}06^{1/12})\frac{1}{\mathrm{kk}}\cdot 30\mathrm{kk}}\right) + \dots \\
&\qquad \dots + e^{-\ln(1{,}06^{1/12})\frac{1}{\mathrm{kk}}\cdot 30\mathrm{kk}} \cdot 500€ \\
&= -2\,800€ + \frac{100€}{\frac{1}{12}\cdot\ln(1{,}06)} \cdot \left(1 - \frac{1}{1{,}06^{\frac{1}{12}\cdot 30}}\right) + \frac{1}{1{,}06^{\frac{1}{12}\cdot 30}} \cdot 500€ = 423{,}95€
\end{aligned}
$$

c) Koska nettonykyarvo on positiivinen, niin sisäinen korkokanta on suurempi kuin nykyarvolaskussa käytetty laskentakorko 6% (per annum).

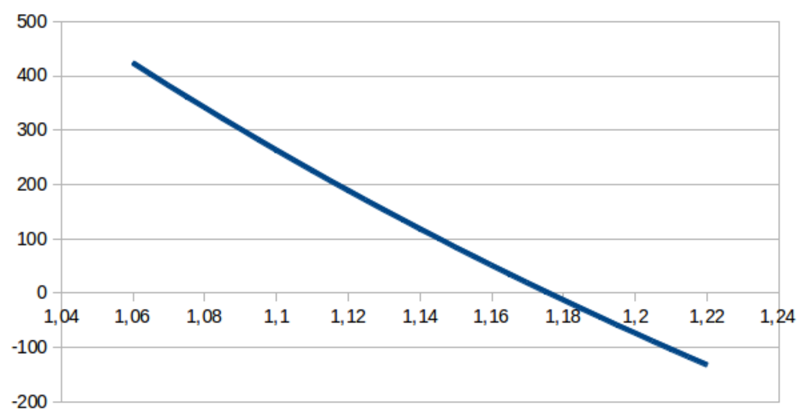
Jos vuotuinen laskentakorkotekija on $r = 1 + i_{tod}$, niin

$$NNA = -2\,800€ + \frac{1\,200€}{\ln(r)} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^{2,5}}\right) + \frac{1}{r^{2,5}} \cdot 500€$$

Kun tämän lausekkeen arvoja lasketaan Exelillä, saadaan alla oleva kuva. Kuvan perusteella sisäinen korkokanta on noin 17,5%.

Tehtävän 4 kuva:

r	NNA
1,06	423,9468663
1,065	402,9302034
1,07	382,1928808
1,075	361,7297256
1,08	341,5356861
1,085	321,6058282
1,09	301,9353323
1,095	282,5194898
1,1	263,3537005
1,105	244,433469
1,11	225,7544026
1,115	207,3122076
1,12	189,1026873
1,125	171,1217392
1,13	153,3653521
1,135	135,8296041
1,14	118,5106601
1,145	101,4047694
1,15	84,50826342
1,155	67,81755364
1,16	51,32912951
1,165	35,03955636
1,17	18,94547344
1,175	3,043592003
1,18	-12,6693066
1,185	-28,1963725
1,19	-43,5406894
1,195	-58,7052762
1,2	-73,6930882
1,205	-88,5070192
1,21	-103,149903



5. Verrataan kahta projektia. Projektin A perusinvestointi on 2 000€ ja se tuottaa kahden vuoden ajan 100€/kk. Projektin B perusinvestointi on 16 000€ja se tuottaa kymmenen vuoden ajan 200€/kk. Kassavirroissa on huomioitu vain liiketoiminnan tuotot ja kustannukset. Rahoitusmenoja ei ole vielä laskettu mukaan.
a) Laske projektien nettonykyarvot, kun laskentakorko on 8% (todellinen vuosikorko). Ovatko projektit kannattavia?
b) Suhteellinen nykyarvo määritellään kaavalla:
suhteellinen nykyarvo = SNA = (tulovirran nykyarvo)/(kustannusvirran nykyarvo).
Laske tehtävän projekteille A ja B suhteelliset nettonykyarvot. Kumpi projekteista on kannattavampi?

a) *Ratkaisu:*

$$
\begin{aligned}
NNA_A &= -2\,000€ - \sum_{j=1}^{24} \frac{100€}{(1{,}08^{1/12})^j} \\
&= -2\,000€ - \frac{100€}{1{,}08^{1/12}} \cdot \left(\frac{1-(1{,}08^{-1/12})^{24}}{1-(1{,}08^{-1/12})} \right) = 217{,}29€ > 0€ \text{ (ok)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
NNA_B &= -16\,000€ - \sum_{j=1}^{120} \frac{200€}{(1{,}08^{1/12})^j} \\
&= -16\,000€ - \frac{200€}{1{,}08^{1/12}} \cdot \left(\frac{1-(1{,}08^{-1/12})^{120}}{1-(1{,}08^{-1/12})} \right) = 686{,}48€ > 0€ \text{ (ok)}
\end{aligned}
$$

Kumpikin projekti on kannattava (8% laskentakorolla).

B-projektin nettonykyarvo on suurempi (kolminkertainen), mutta silti tulos tuntuu B:n kannalta lievältä pettymykseltä, sillä B-projektissa kiinnitettiin kahdeksankertainen pääoma, ja tuottoja odotettiin 10 vuotta!
b)

$$
\begin{aligned}
SNA_A &= \frac{2\,217{,}29€}{2\,000€} = 1{,}1086 > 1 \text{ (ok)} \\
SNA_B &= \frac{16\,686{,}48€}{16\,000€} = 1{,}0429 > 1 \text{ (ok)}
\end{aligned}
$$

Kumpikin projekti on kannattava (8% laskentakorolla). Projekti A on suhteellisesti parempi ($SNA_A > SNA_B$).

6. a) Laske Excelin IRR-funktion avulla tehtävän 5 projekteille sisäiset korkokannat (per annum). Kumpi nyt tuntuu kannattavammalta?

b) Laske pääoman tuottoasteet $\mathrm{ROI_{II}}$ tehtävän 5 projekteille. (Tulokset eivät välttämättä ole järkeviä, sillä ROI on hyvä kannattavuuden mittari vain pitkälle projektille.) Kumpi nyt tuntuu kannattavammalta?

Ratkaisu: a) Excelin laskemat jaksoon (kk) liittyvät sisäiset korkokannat ovat $IRR_{kk,A} = 1{,}513\%$ ja $IRR_{kk,B} = 0{,}724\%$. Vuosijakson sisäiset korkokannat ovat silloin.

$$
\begin{aligned}
IRR_{a,A} &= (1{,}01513)^{12} - 1 = 0{,}19747 \quad \longrightarrow i_{sis,A} = 19{,}75\% \\
IRR_{a,B} &= (1{,}00724)^{12} - 1 = 0{,}09044 \quad \longrightarrow i_{sis,B} = 9{,}04\%
\end{aligned}
$$

Projekti A antaa tuoton nopeammin ja antaa paremman koron sijoitetulle pääomalle. Se on siis kiistatta parempi.
b)

$$
\text{a)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{ROI}_{II,A} &= \frac{1\,200€}{2000€} \cdot 100\% = 60\%, \\ \mathrm{ROI}_{II,B} &= \frac{2\,400€}{16\,000€} \cdot 100\% = 15\%. \end{aligned}
$$

ROI antaa nyt selvästi liian isoja arvoja. (Kannattavuutta ei kannat nyt ratkaista näiden perusteella.)

7. Laske takaisinmaksuajat tehtävän 5 projekteille. Kumpi nyt tuntuu kannattavammalta?

Ratkaisu: Takaisinmaksuaika on $n = \dfrac{\ln(k/(k-iH))}{\ln(1+i)}$.

$$
\begin{aligned} n_A &= \frac{\ln(100€/(100€-(1{,}08^{1/12}-1)\cdot 2\,000€))}{\ln(1{,}08^{1/12})} = 21{,}5\,\mathrm{kk} = 1\,\mathrm{vuosi}\,9{,}5\,\mathrm{kk} \\ n_B &= \frac{\ln(200€/(200€-(1{,}08^{1/12}-1)\cdot 16\,000€))}{\ln(1{,}08^{1/12})} = 112{,}7\,\mathrm{kk} = 9\,\mathrm{vuotta}\,4{,}7\,\mathrm{kk} \end{aligned}
$$

Ainakin kumpikin projekti on kannattava siinä mielessä, että ne maksavat itsensä takaisin. Koska projektien kestot ovat erilaisia, niiden vertailu ei ole helppoa takaisinmaksuajan perusteella.

Joitakin vastauksia:
4)a $NNA_A = 217{,}29$€
4b) $SNA_A = 1{,}109$
6a) $i_{sis,A} = 19{,}75\%$
6b) $\mathrm{ROI}_{\mathrm{II}A} = 60{,}0\%$
7a) A:n takaisinmaksuaika on $21{,}5\mathrm{kk} = 1{,}8$vuotta.

Kaavoja:
Korkolasku

$$\begin{aligned}
\text{yksinkertainen korkolasku: } K_t &= (1+it)K_0 = (1+\frac{p}{100}t)K_0, \text{ kun } 0<t<1 \\
\text{koronkorkolasku: } K_t &= (1+i)^t K_0, \text{ kun } t = 1,2,3,\ldots \\
\text{jatkuva korkolasku: } K_t &= (1+i)^t K_0 = e^{\rho t}K_0, \text{ kun } t>1 \text{ ja } (1+i) = e^{\rho}
\end{aligned}$$

Jaksolliset suoritukset prolongointitekijä, diskonttaustekijä, kuoletuskerroin

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \qquad a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}, \qquad c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$k = c_{n,i}K_0, \qquad k = c_{n,i}(H - h + m)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1 + (k-1)d) = n\cdot\frac{(a_1+a_n)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Kassavirran nettonykyarvo

$$NPV = k_0 + \sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{(1+i)^j}$$

Projektin nettonykyarvo

$$NPV = -H + \sum_{j=1}^{n}\frac{k_j}{(1+i)^j}$$

Pääoman tuottoaste

$$\begin{aligned}
\mathrm{ROI}^{\mathrm{I}} &= \frac{\text{nettovuositulos}}{\text{keskimäärin sidottu pääoma}}\cdot 100\% \\
\mathrm{ROI}^{\mathrm{II}} &= \frac{\text{nettovuositulos}}{\text{alussa sidottu pääoma}}\cdot 100\%
\end{aligned}$$

Takaisinmaksu-aika

$$n = \frac{\ln(k/(k-iH))}{\ln(1+i)}$$