Vaasan yliopisto, kevät 2016

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

7. harjoitus, viikko 10 (7.3.–11.3.2016)

R1	ma	10–12	F455	R5	ti	14–16	F455
R2	ma	14–16	F455	R6	to	12–14	F455
R3	ti	08–10	F455	R7	pe	08–10	F455
R4	ti	12–14	F455	R8	pe	10–12	F455

1. Laske integraalit

$$\text{a)}\quad \int (3x^2 - x)\mathrm{d}x \qquad \text{b)}\quad \int_1^4 (2x+1)\mathrm{d}x$$

2. Tarkista derivoimalla alla olevan kaavakokoelman kaavat (1), (2) ja (3).
Tarvitset tulon derivointikaavaa $D(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ ja eksponenttifunktion derivaatan kaavaa $D(be^{rx}) = r\cdot be^{rx}$.

3. Eksponenttijakauman tiheysfunktio on $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, missä oletamme, että $x > 0$ ja $\lambda > 0$. Laske integraali

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \lambda e^{-\lambda x}dx.$$

(Ohje: raja-arvoa laskiessa tulee vastaan muoto $\lim_{x\to\infty} P(x)e^{-\lambda x}$. Tämä raja-arvo on 0, sillä tekijä $e^{-\lambda x}$ pienenee kohden nollaa nopeammin kuin mikään polynomi.)

4. Eksponenttijakauman tiheysfunktio on $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Laske eksponenttijakauman odotusarvo eli integraali

$$\int_0^\infty xf(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx.$$

5. Erään tuotekorin osalta tiedetään vuosien 2000 ja 2010 hinnat ja ostojen määrät. Perusajankohta on nyt 2000 ja vertailuajankohta 2010

	2000			2010		
tuote	p_0	q_0	a_0	p_t	q_t	a_t
1	15,00	100		10,00	300	
2	8,00	500		15,00	100	
3	30,00	20		20,00	200	

a) Laske Laspeyres'in, Paashenin ja Fisherin hinta-indeksit.
b) Kerro sanallisesti, miksi indeksit eroavat niin paljon.

6. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$$

7. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 4x + 5y - 3z = 3 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

8. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 5y - 8 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

Vaasan yliopisto, kevät 2016

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

7. harjoitus, viikko 10 (7.3.–11.3.2016)

R1	ma	10–12	F455	R5	ti	14–16	F455
R2	ma	14–16	F455	R6	to	12–14	F455
R3	ti	08–10	F455	R7	pe	08–10	F455
R4	ti	12–14	F455	R8	pe	10–12	F455

1. Laske integraalit

a) $\int (3x^2 - x)\mathrm{d}x$ b) $\int_1^4 (2x+1)\mathrm{d}x$

a) $\int (3x^2 - x)dx = \frac{3}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C = \underline{\underline{x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C}}$

b) $\int_1^4 (2x+1)\,dx = \Big/_1^4 (x^2 + x)$

$= (4^2+4) - (1^2+1)$

$= 20 - 2$

$= \underline{\underline{18}}$

2. Tarkista derivoimalla alla olevan kaavakokoelman kaavat (1), (2) ja (3). Tarvitset tulon derivointikaavaa $D(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ ja eksponenttifunktion derivaatan kaavaa $D(be^{rx}) = r\cdot be^{rx}$.

(1) $D\left[\frac{a}{r}\cdot e^{rx} + C\right] = r\cdot\frac{a}{r}\cdot e^{rx} = ae^{rx}$ ok

(2) $D\left[\frac{a}{r^2}(rx-1)e^{rx} + C\right] = D\left[\left(\frac{a}{r}x - \frac{a}{r^2}\right)e^{rx} + C\right]$

$= D\left[\frac{a}{r}x - \frac{a}{r^2}\right]e^{rx} + \left(\frac{a}{r}x - \frac{a}{r^2}\right)De^{rx}$

$= \frac{a}{r}e^{rx} + \left(\frac{a}{r}x - \frac{a}{r^2}\right)re^{rx}$

$= \cancel{\frac{a}{r}e^{rx}} + axe^{rx} - \cancel{\frac{a}{r}e^{rx}} = axe^{rx}$ ok

(3) $D\left[\frac{a}{r^3}(r^2x^2 - 2rx + 2)e^{rx}\right] = D\left[\left(\frac{a}{r}x^2 - \frac{2a}{r^2}x + \frac{2a}{r^3}\right)e^{rx}\right]$

$= D\left[\frac{a}{r}x^2 - \frac{2a}{r^2}x + \frac{2a}{r^3}\right]e^{rx} + \left(\frac{a}{r}x^2 - \frac{2a}{r^2}x + \frac{2a}{r^3}\right)re^{rx}$

$= \left(\cancel{\frac{2a}{r}x} - \cancel{\frac{2a}{r^2}}\right)e^{rx} + \left(ax^2 - \cancel{\frac{2a}{r}x} + \cancel{\frac{2a}{r^2}}\right)e^{rx} = ax^2e^{rx}$ ok

3. Eksponenttijakauman tiheysfunktio on $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, missä oletamme, että $x > 0$ ja $\lambda > 0$. Laske integraali

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

(Ohje: raja-arvoa laskiessa tulee vastaan muoto $\lim_{x\to\infty} P(x)e^{-\lambda x}$. Tämä raja-arvo on 0, sillä tekijä $e^{-\lambda x}$ pienenee kohden nollaa nopeammin kuin mikään polynomi.)

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Kaavalla 1 $\begin{cases} a = \lambda \\ r = -\lambda \end{cases}$

$$= \lim_{b\to\infty} \Big/_0^b \frac{\lambda}{-\lambda} e^{\lambda x} = \lim_{b\to\infty} \Big/_0^b - e^{\lambda x}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[(-e^{\lambda b}) - (-e^0) \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[1 - e^{\lambda b} \right] = \underline{\underline{1}}$$

4. Eksponenttijakauman tiheysfunktio on $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Laske eksponenttijakauman odotusarvo eli integraali

$$\int_0^\infty x f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

$$\int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

Kaavalla 2
$a = \lambda, \ r = -\lambda$

$$= \lim_{b\to\infty} \Big/_0^b \left[\frac{\lambda}{(-\lambda)^2} (-\lambda x - 1) e^{-\lambda x} \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \Big[\underbrace{\left(\frac{1}{\lambda} (-\lambda b - 1) e^{-\lambda b} \right)}_{\to 0} - \underbrace{\left(\frac{1}{\lambda} (-0 - 1) \cdot 1 \right)}_{= -\frac{1}{\lambda}} \Big]$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}}$$

5. Erään tuotekorin osalta tiedetään vuosien 2000 ja 2010 hinnat ja ostojen määrät. Perusajankohta on nyt 2000 ja vertailuajankohta 2010

	2000			2010		
tuote	p_0	q_0	a_0	p_t	q_t	a_t
1	15,00	100		10,00	300	
2	8,00	500		15,00	100	
3	30,00	20		20,00	200	

a) Laske Laspeyres'in, Paashenin ja Fisherin hinta-indeksit.
b) Kerro sanallisesti, miksi indeksit eroavat niin paljon.

a)

$$P^L = \frac{100\cdot 10 + \boxed{500\cdot 15} + 20\cdot 20}{100\cdot 15 + \boxed{500\cdot 8} + 20\cdot 30}\cdot 100 = 145{,}9$$

$$P^P = \frac{\boxed{300\cdot 10} + 100\cdot 15 + \boxed{200\cdot 20}}{\boxed{300\cdot 15} + 100\cdot 8 + \boxed{200\cdot 30}}\cdot 100 = 75{,}2$$

$$P^F = \sqrt{P^L\cdot P^P} = \sqrt{145{,}9\cdot 75{,}2} = 104{,}7$$

b)

Laspeyresin indeksissä isoimman painon sai tuote 2, jonka hinta nousi voimakkaasti

Paashenin indeksissä isoimmat painot tuli tuotteille 1 ja 3, joiden hinnat laskivat

6. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 13 \end{array}\right) \cdot 3 \to (3\ 3\,|\,9)\ -$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \begin{cases} x+y=3 & (1) \\ 2y=4 & (2) \end{cases}$$

$(2) \to y = 2$
$(1) \to x + 2 = 1 \to x = 1$

Vastaus $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Tark. $\begin{cases} 1 + 2 = 3 & \text{ok} \\ 3\cdot 1 + 5\cdot 2 = 13 & \text{ok} \end{cases}$

7. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 4x + 5y - 3z = 3 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -3 & 3 \end{array}\right) \quad \cdot 2 \rightarrow (2\ 4\ -4 \mid 4) \quad \cdot 4 \rightarrow (4\ 8\ -8 \mid 8)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 5 & -5 \end{array}\right) \quad \cdot(-1) \rightarrow (0\ 3\ -5 \mid 1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \leftarrow \text{epätosi}$$

Vastaus: Ratkaisujoukko on epätyhjä

8. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 5y = 8 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{array}\right) \quad \cdot 2 \quad \cdot 4 \quad \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{-4} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 & (1) \\ \quad -3y = -4 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow y = \frac{4}{3}, \quad (1) \Rightarrow x + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Vastaus $\begin{cases} x = 1/3 \\ y = 4/3 \end{cases}$

tark. $\begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2 & \text{ok} \\ 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8 & \text{ok} \\ \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{9}{3} = 3 & \text{ok} \end{cases}$