

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

8. harjoitus, viikko 11 (14.3.–18.3.2016)

R1	ma	10–12	F455	R5	ti	14–16	F455
R2	ma	14–16	F455	R6	to	12–14	F455
R3	ti	08–10	F455	R7	pe	08–10	F455
R4	ti	12–14	F455	R8	pe	10–12	F455

1. Yritys valmistaa muoviraaka-aineesta kahta tuotetta A ja B. Tuotteen A valmistaminen vie aikaa 15min ja raaka-ainetta 10kg. Tuotteen B valmistaminen vie aikaa 12min ja raaka-ainetta 15kg. Raaka-ainetta on olemassa 2500 kg/viikko ja laitteisto, jolla tuotteita valmistetaan on käytössä 40 tuntia viikossa. Yhden A-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 5 euroa ja yhden B-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 7 euroa. Mahdollisesti käyttämättä jäänyt muoviraaka-aine voidaan myydä hintaan 100 euroa/tonni. Alla on kaksi ongelmasta muodostettua mallia. Ovatko mallit päteviä? Kuvaavatko ne oikein ongelmaa?

$x_1 = A:n$ tuotanto (kpl/viikko) $x_2 = B:n$ tuotanto (kpl/viikko)	$x_1 = A:n$ tuotanto (kpl/viikko) $x_2 = B:n$ tuotanto (kpl/viikko) $x_3 =$ myytävä raaka-aine (kg/vko)
$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad 4x_1 + 5,5x_2 + 250 \\ \quad 15x_1 + 12x_2 \leq 2400 \\ \quad 10x_1 + 15x_2 \leq 2500 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad 5x_1 + 7x_2 + 0,1 \cdot x_3 \\ \quad 15x_1 + 12x_2 \leq 2400 \\ \quad 10x_1 + 15x_2 + x_3 \leq 2500 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$

2. Ratkaise graafisesti tehtävän 1 malleista se, joka tuntuu luontevammalta.

3. Ratkaise graafisesti seuraava lp-malli

$$\begin{array}{l} \max z = x_1 + 2x_2 \\ \text{ehdoin} \quad 3x_1 + x_2 \leq 45 \\ \quad x_1 + x_2 \leq 18 \\ \quad x_1 + 4x_2 \leq 60 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

4. a) Piirrä seuraavan LP-mallin käypä alue ja b) ratkaise malli.

$$\begin{array}{l} \min z = x_1 - 5x_2 \\ \text{ehdoin} \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ \quad x_1 + x_2 \geq 14 \\ \quad x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ \quad -x_1 + x_2 \leq 10 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

5. a) Miten tehtävän 4 optimiratkaisu muuttuu, jos rajoitteisiin lisätään uusi rajoite

$$x_1 + x_2 \geq 15$$

b) Miten edellisen tehtävän optimiratkaisu muuttuu, jos rajoitteisiin lisätään uusi rajoite

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030**8. harjoitus, viikko 11 (14.3.–18.3.2016)**

R1	ma	10–12	F455	R5	ti	14–16	F455
R2	ma	14–16	F455	R6	to	12–14	F455
R3	ti	08–10	F455	R7	pe	08–10	F455
R4	ti	12–14	F455	R8	pe	10–12	F455

1. Yritys valmistaa muoviraaka-aineesta kahta tuotetta A ja B. Tuotteen A valmistaminen vie aikaa 15min ja raaka-ainetta 10kg. Tuotteen B valmistaminen vie aikaa 12min ja raaka-ainetta 15kg. Raaka-ainetta on olemassa 2500 kg/viikko ja laitteisto, jolla tuotteita valmistetaan on käytössä 40 tuntia viikossa. Yhden A-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 5 euroa ja yhden B-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 7 euroa. Mahdollisesti käyttämättä jäänyt muoviraaka-aine voidaan myydä hintaan 100 euroa/tonni. Alla on kaksi ongelmasta muodostettua mallia. Ovatko mallit päteviä? Kuvaavatko ne oikein ongelmaa?

$x_1 = \text{A:n tuotanto (kpl/viikko)}$ $x_2 = \text{B:n tuotanto (kpl/viikko)}$ $\left\{ \begin{array}{l} \max \quad 4x_1 + 5,5x_2 + 250 \\ 15x_1 + 12x_2 \leq 2400 \\ 10x_1 + 15x_2 \leq 2500 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$	I	$x_1 = \text{A:n tuotanto (kpl/viikko)}$ $x_2 = \text{B:n tuotanto (kpl/viikko)}$ $x_3 = \text{myytävä raaka-aine (kg/vko)}$ $\left\{ \begin{array}{l} \max \quad 5x_1 + 7x_2 + 0,1 \cdot x_3 \\ 15x_1 + 12x_2 \leq 2400 \\ 10x_1 + 15x_2 + x_3 \leq 2500 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$	II
--	--	---	---

Rajailheet ovat oikein kummassakin mallissa

Tarkistetaan tavoite-funktiot

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 5 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 0,1 \cdot (2500 - 10x_1 - 15x_2) \\ & = 5x_1 + 7x_2 + 250 - 1x_1 - 1,5x_2 \\ & = 4x_1 + 5,5x_2 + 250 \quad \text{ok} \end{aligned}$$

↑ käyttämättä jäänyt muov. (kg/vko)

$$\text{II} \quad 5x_1 + 7x_2 + 0,1x_3 \quad \text{ok}$$

Vast: Kumpikin malli on oikein muodostettu.

Huom: x_3 ei oikeastaan ole päätös muuttuja. Kun x_1 :lle ja x_2 :lle on asetettu arvot, niin käyttämättä jäävän x_3 :n arvo määräytyy niistä (eli muoviraaka-ainetta jäljellä takapihalle).
Malli II on helpompi ymmärtää, koska sen kertoimet tulevat suoraan tarinasta! Samasta syystä mallista II on helpompi tehdä "autä-jos" muunnoksia!

2. Ratkaise graafisesti tehtävän 1 malleista se, joka tuntuu luontevammalta.

$$\begin{cases} \max & 4x_1 + 5,5x_2 \\ \text{s.t.} & 15x_1 + 12x_2 \leq 2400 \\ & 10x_1 + 15x_2 \leq 2500 \end{cases}$$

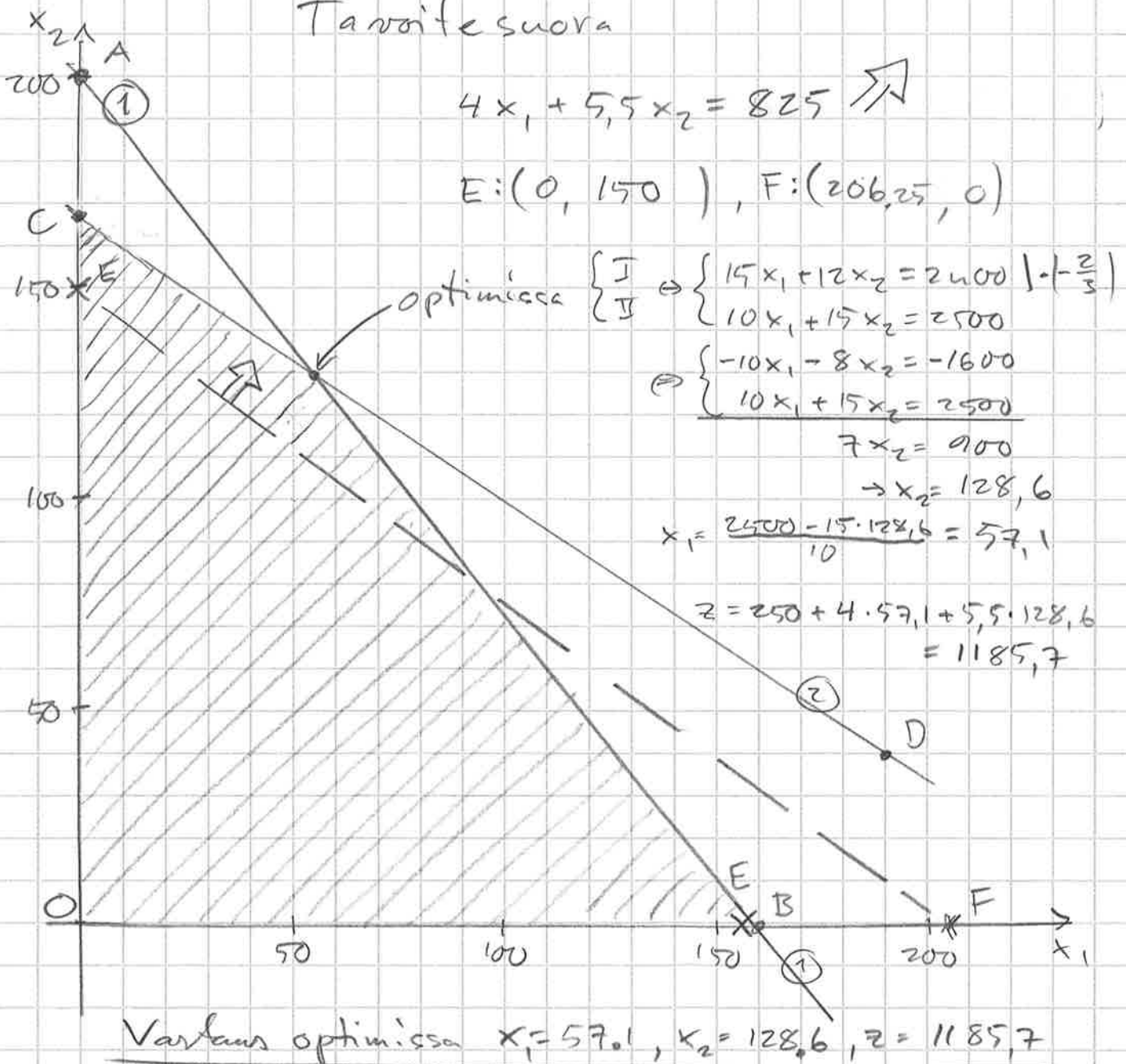
1. raj. $15x_1 + 12x_2 \leq 2400 \rightarrow A:(0, 200), B:(160, 0)$

2. raj. $10x_1 + 15x_2 \leq 2500 \rightarrow C:(0, 166,7), D:(190, 40)$

Tavoite suora

$$4x_1 + 5,5x_2 = 825 \nearrow$$

$$E:(0, 150), F:(206,25, 0)$$

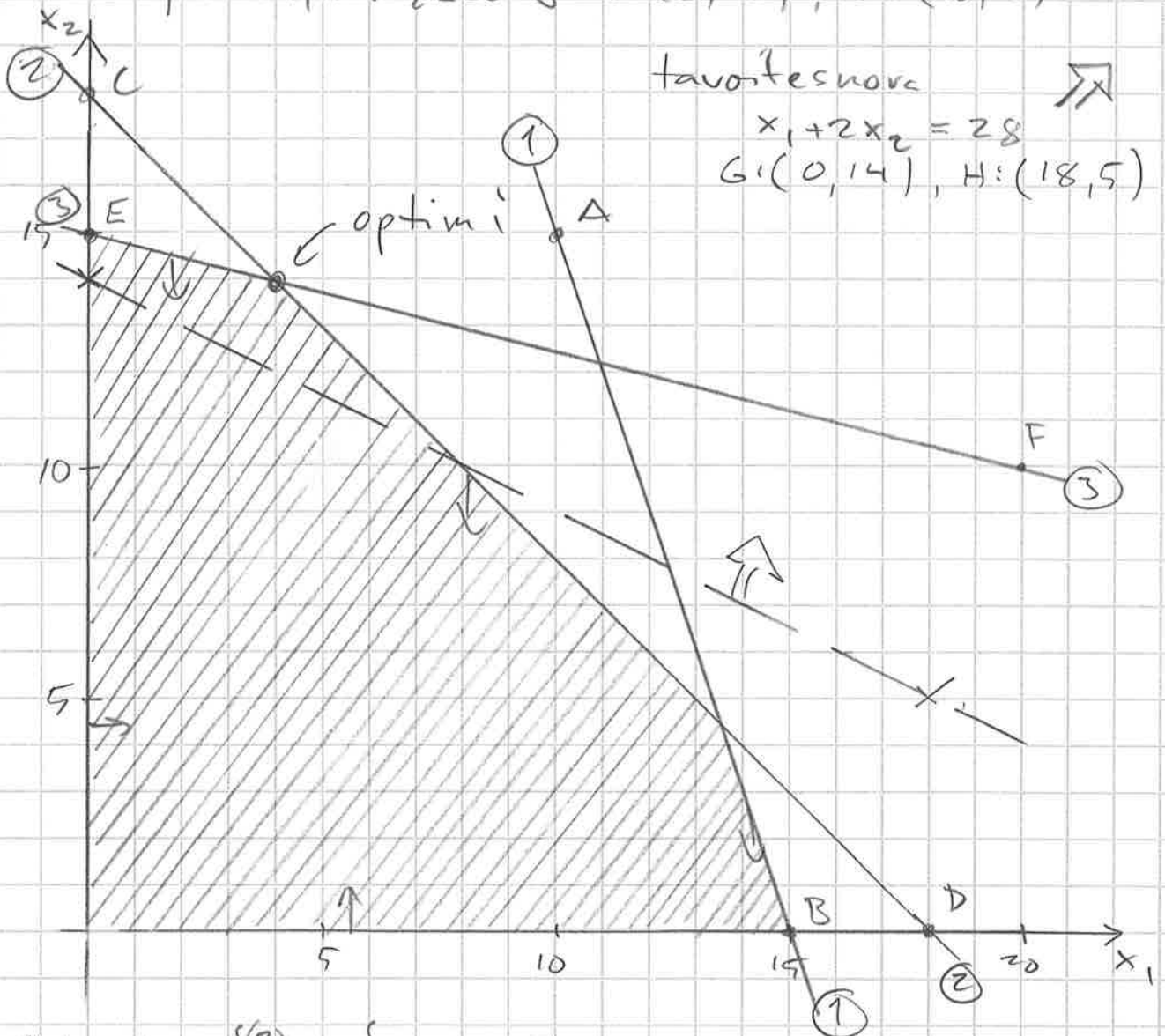


Tark. $z(C) = 250 + 4 \cdot 0 + 5,5 \cdot 166,7 = 1166,9$
 $z(B) = 250 + 4 \cdot 160 + 5,5 \cdot 0 = 290$
 $z(O) = 250 + 4 \cdot 0 + 5,5 \cdot 0 = 250$

3. Ratkaise graafisesti seuraava lp-malli

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{ehdoin} \quad 3x_1 + x_2 &\leq 45 \\ x_1 + x_2 &\leq 18 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. raj $3x_1 + x_2 \leq 45 \downarrow$ A: (10, 15), B: (15, 0)
 2. raj $x_1 + x_2 \leq 18 \downarrow$ C: (0, 18), D: (18, 0)
 3. raj $x_1 + 4x_2 \leq 60 \downarrow$ E: (0, 15), F: (20, 10)



targetesuora \nearrow
 $x_1 + 2x_2 = 28$
 G: (0, 14), H: (18, 5)

Optimissessä $\begin{cases} (2) \\ (3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 18 \\ x_1 + 4x_2 = 60 \end{cases}$

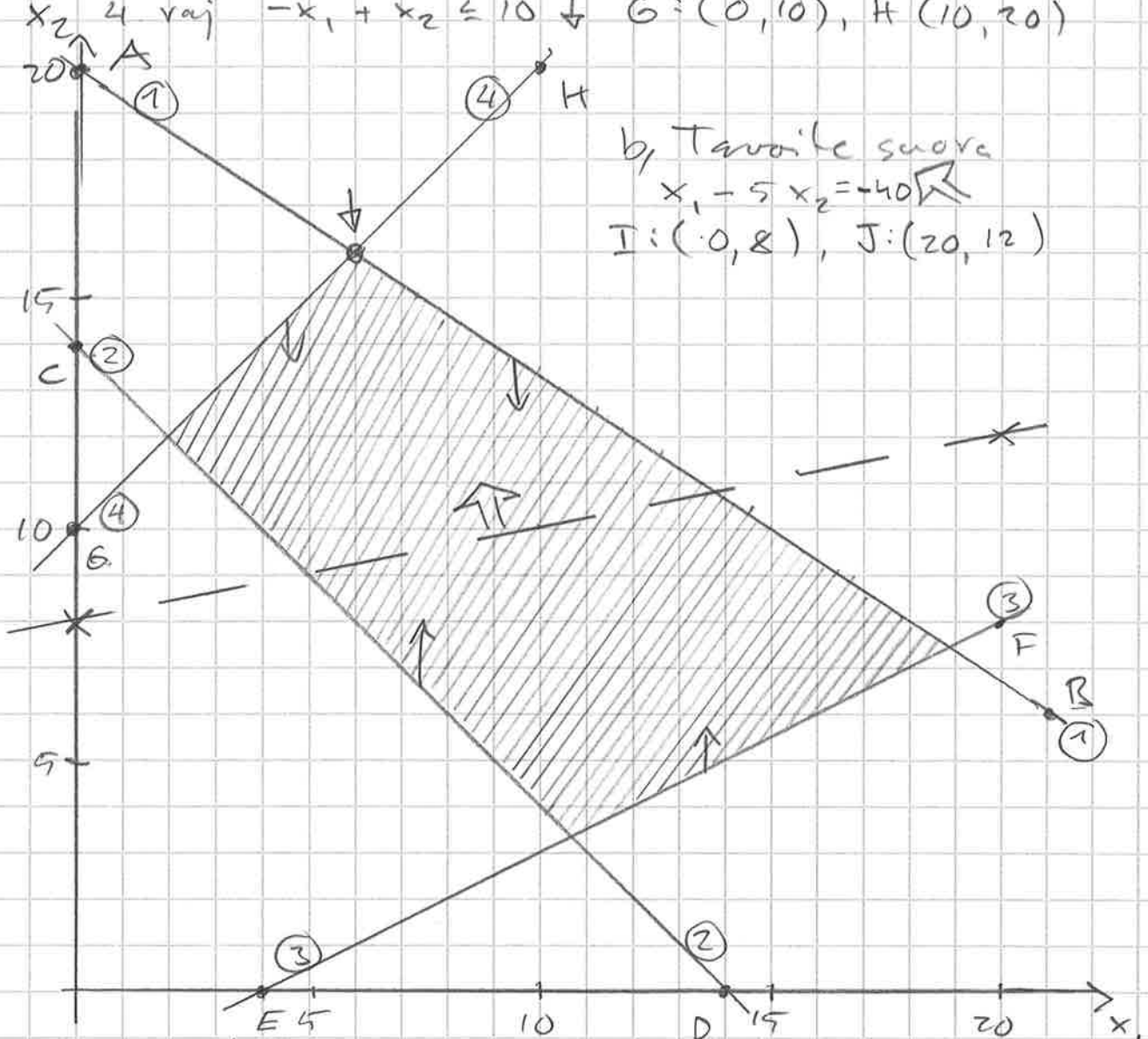
$$\begin{aligned} 3x_2 &= 42 \rightarrow x_2 = 14 \\ x_1 &= 18 - 14 = 4 \\ z &= 4 + 2 \cdot 14 = 32 \end{aligned}$$

V: optimissa $x_1 = 4, x_2 = 14, z = 32$

4. a) Piirrä seuraavan LP-mallin käypä alue ja b) ratkaise malli.

$$\begin{aligned} \min z = & x_1 - 5x_2 \\ \text{ehdoin} & 2x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ & x_1 + x_2 \geq 14 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) 1. raj $2x_1 + 3x_2 \leq 60 \downarrow$ A: (0, 20), B: (21, 6)
 2. raj $x_1 + x_2 \geq 14 \uparrow$ C: (0, 14), D: (14, 0)
 3. raj $x_1 - 2x_2 \leq 4 \uparrow$ E: (20, 8), F: (4, 0)
 4. raj $-x_1 + x_2 \leq 10 \downarrow$ G: (0, 10), H: (10, 20)



b) Tavoite suora
 $x_1 - 5x_2 = -40$
 I: (0, 8), J: (20, 12)

optimiassa $\begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 60 \\ -x_1 + x_2 = 10 \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 60 \\ -2x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$

$$\begin{aligned} 5x_2 &= 80 \\ x_2 &= 16 \\ x_1 &= 6 \\ z &= 6 - 5 \cdot 16 = -74 \end{aligned}$$

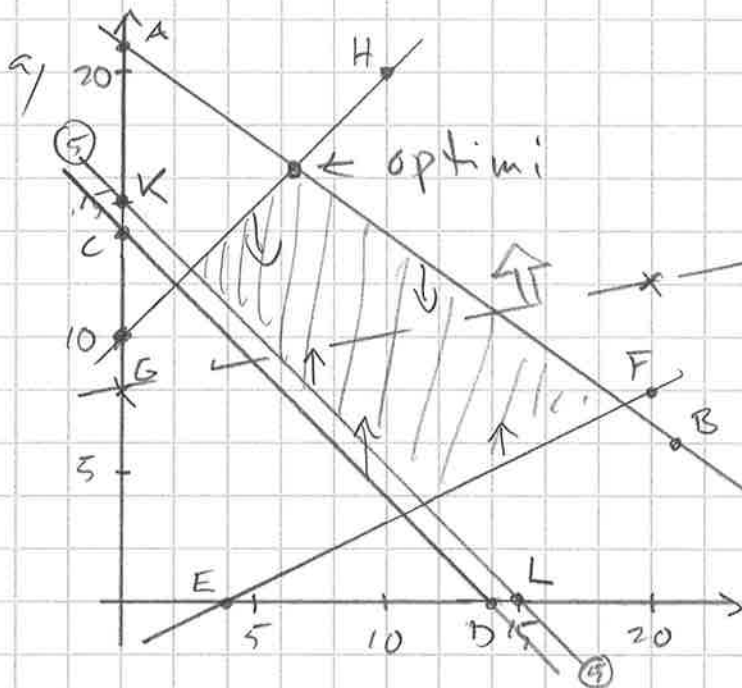
Vast: optimiassa
 $x_1 = 6, x_2 = 16, z = -74$

5. a) Miten tehtävän 4 optimiratkaisu muuttuu, jos rajoitteisiin lisätään uusi rajoite

$$x_1 + x_2 \geq 15$$

b) Miten edellisen tehtävän optimiratkaisu muuttuu, jos rajoitteisiin lisätään uusi rajoite

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

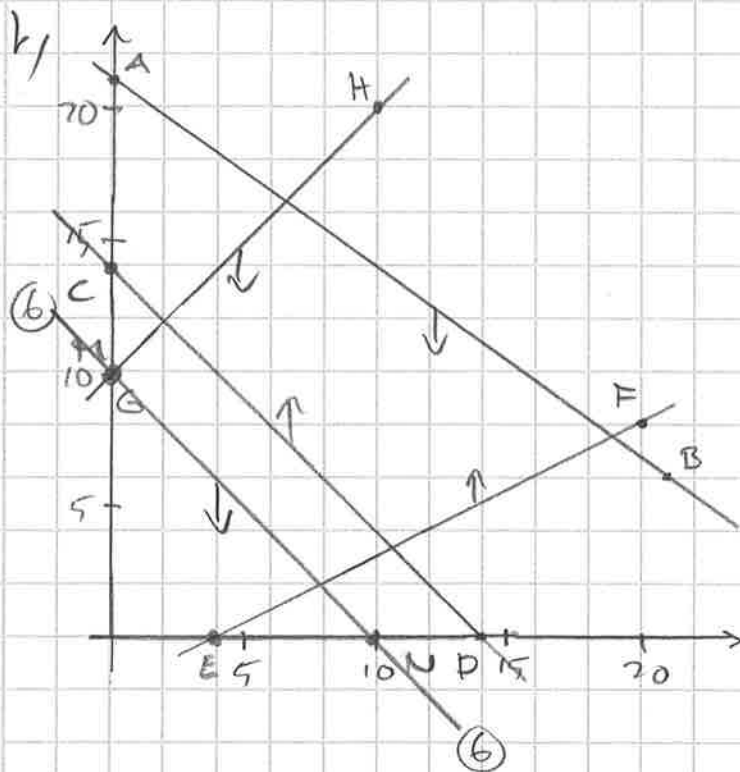


$$x_1 + x_2 \geq 15 \uparrow$$

$$K: (0, 15), L: (15, 0)$$

optimipiste ei
muuttunut

The optimum
did not change



$$x_1 + x_2 \leq 10 \downarrow$$

$$M: (0, 10), N: (10, 0)$$

Käypä alue tyhjä
ei ole olemassa
yhteen rajoitteet
tehtävän päätös-
vaihtoehdon

The new feasible
region is empty
→ no feasible
solution left