

## Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

### 9. harjoitus, viikot 12–13 (21.3.–1.4.2016)

R1	ma (21.3.)	10–12	F455	R6	to (31.3.)	12–14	F455
R2	ma (21.3.)	14–16	F455	R7	pe (01.4.)	08–10	F455
R3	ti (22.3.)	08–10	F455	R8	pe (01.4.)	10–12	F455
R4	ti (22.3.)	12–14	F455				
R5	ti (22.3.)	14–16	F455				

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)

a)  $A+B$ , b)  $A+C$ , c)  $B+C$

2. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)

a)  $AB$ , b)  $BA$ , c)  $AC$ , d)  $CA$ , e)  $C^T A$

3. Määritä rivioperaatioiden avulla käänteismatriisi matriisille

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x + z = 7 \\ 2x + y + 3z = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}$$

5. Miten edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu, jos kolmannen yhtälön oikea puoli kasvaa yhdellä (arvosta 15 arvoon 16)?

6. Etsi jokin ei-triviaali ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} 3x - 3y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ 3x + 9y - 11z = 0 \end{cases}$$

7. Ratkaise yhtälöryhmä, kun  $a$  ja  $b$  ovat reaalisia vakioita, joiden arvoja emme kuitenkaan vielä tiedä. Ratkaisu siis riippuu  $a$ :n ja  $b$ :n arvoista. Kirjoita vastaus mahdollisimman täydellisenä niin, että kaikki mahdolliset erikoistapauksetkin huomioidaan.

$$\begin{cases} 3x - 3y + z = a \\ y - z = 0 \\ 3x + 9y + bz = 0 \end{cases}$$

**Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030****9. harjoitus, viikot 12–13 (21.3.–1.4.2016)**

R1	ma (21.3.)	10–12	F455	R6	to (31.3.)	12–14	F455
R2	ma (21.3.)	14–16	F455	R7	pe (01.4.)	08–10	F455
R3	ti (22.3.)	08–10	F455	R8	pe (01.4.)	10–12	F455
R4	ti (22.3.)	12–14	F455				
R5	ti (22.3.)	14–16	F455				

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

**1. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)**a)  $A+B$ , b)  $A+C$ , c)  $B+C$ 

$$a) A+B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) A+C \text{ ei voi laskea} \quad c) B+C \text{ ei voi laskea}$$

$3 \times 3 \quad 3 \times 2$                        $3 \times 3 \quad 3 \times 2$

**2. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)**a)  $AB$ , b)  $BA$ , c)  $AC$ , d)  $CA$ , e)  $C^T A$ 

$$a) AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b) BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) AC = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \quad d) CA \text{ ei voi laskea}$$

$3 \times 2 \quad 3 \times 3$                        $3 \times 3$

$$e) C^T A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Määritä rivioperaatioiden avulla käänteismatriisi matriisille

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-1) \cdot (-2) \\ \leftarrow \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot 1 \cdot (-3) \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{-2} & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \rightarrow N^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -3,5 & 1,5 \\ -0,5 & 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

Tarkistetaan

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -3,5 & 1,5 \\ -0,5 & 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -3,5 & 1,5 \\ -0,5 & 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x + z = 7 \\ 2x + y + 3z = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -3,5 & 1,5 \\ -0,5 & 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

V:  $x=4, y=-2, z=3$

$$\frac{21}{2} \quad \frac{-15}{2}$$

Tarkistus

$$\begin{cases} 4 - (-2) - 2 \cdot 3 = 0 & \text{ok} \\ 4 + 3 = 7 & \text{ok} \\ 2 \cdot 4 + (-2) + 3 \cdot 3 = 15 & \text{ok} \end{cases}$$

5. Miten edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu, jos kolmannen yhtälön oikea puoli kasvaa yhdellä (arvosta 15 arvoon 16)?

$$\Delta \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \Delta \bar{b}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -3,5 & 1,5 \\ -0,5 & 1,5 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

6. Etsi jokin ei-triviaali ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} 3x - 3y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ 3x + 9y - 11z = 0 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & -11 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & -12 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot (-12) \leftarrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 3x - 3y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{Valitaan} \\ z = 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x - 3y = -1 & (1) \\ y = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow y = 1 \quad (1) \rightarrow 3x - 3 \cdot 1 = -1 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\underline{V: x = \frac{2}{3}, y = 1, z = 1}$$

Tarkistus

$$\begin{cases} 3 \cdot \frac{2}{3} - 3 \cdot 1 + 1 = 0 & \text{ok} \\ 1 - 1 = 0 & \text{ok} \\ 3 \cdot \frac{2}{3} + 9 \cdot 1 - 11 \cdot 1 = 0 & \text{ok} \end{cases}$$

7. Ratkaise yhtälöryhmä, kun  $a$  ja  $b$  ovat reaalisia vakioita, joiden arvoja emme kuitenkaan vielä tiedä. Ratkaisu siis riippuu  $a$ :n ja  $b$ :n arvoista. Kirjoita vastaus mahdollisimman täydellisenä niin, että kaikki mahdolliset erikoistapauksetkin huomioidaan.

$$\begin{cases} 3x - 3y + z = a \\ y - z = 0 \\ 3x + 9y + bz = 0 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 9 & b & 0 \end{array} \right) \cdot (-1) \leftarrow \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & b-1 & -a \end{array} \right) \cdot (-12) \leftarrow \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b+11 & -a \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{array}{rcl} 3x - 3y + z = a & (1) \\ y - z = 0 & (2) \\ (b+11)z = -a & (3) \end{array}$$

Jos  $b+11 \neq 0$ , niin

$$(3) \rightarrow z = \frac{-a}{b+11}, \quad (2) \rightarrow y = \frac{-a}{b+11}$$

$$(1) \rightarrow 3x - 3 \cdot \left( \frac{-a}{b+11} \right) + \frac{-a}{b+11} = \frac{a(b+11)}{b+11}$$

$$3x = \frac{a(b+9)}{b+11}$$

Jos  $b+11 = 0$  ja  $a \neq 0$ , niin (3)  $z=0$ ,  $y=0$ ,  $x=0$   
 $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$

Jos  $b+11 = 0$  ja  $a = 0$ , niin (3) ok

$$(2) \rightarrow y = z, \quad (1) \rightarrow x = \frac{2}{3}z$$

V: Jos  $b \neq -11$ , niin  $x = \frac{1}{3} \cdot a(b+9)/(b+11)$ ,  $y = \frac{-a}{b+11}$ ,  $z = \frac{-a}{b+11}$ ,  
 jos  $b = -11$  ja  $a \neq 0$ , niin ei ratkaisua,  
 jos  $b = -11$  ja  $a = 0$ , niin  $x = \frac{2}{3}z$  ja  $y = z$