

## Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

### Esimerkkejä 10.2.2017

1. Jatkuva kassavirta  $k = 100 \text{ €/kk}$  alkaa nyt ( $t = 0$ ) ja päättyy hetkellä  $t = 2.5$  vuotta. Laskentakorkokanta on 6% (p.a.) eli korkointensiteetti  $\rho = \ln(1,06) \frac{1}{\text{vuosi}}$ . Jatkuvan korkolaskun mukaan kassavirran NykyArvo on

$$NA = \frac{k}{\rho}(1 - e^{-\rho t}).$$

(Kaava perustellaan myöhemmin. Nyt se on vain kaava.)

a) Laske NA, kun ( $k = 1200 \text{ €/vuosi}$ ,  $\rho = \ln(1,06) \frac{1}{\text{vuosi}}$ ,  $t = 2,5$  vuotta )

b) Laske NA, kun ( $k = 100 \text{ €/kk}$ ,  $\rho = \ln(1,06^{1/12}) \frac{1}{\text{kk}}$ ,  $t = 30$ kk )

*Ratkaisu:*

a)

$$\begin{aligned} NA &= \frac{k}{\rho}(1 - e^{-\rho t}) \\ &= \frac{1200 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}}{\ln(1,06) \frac{1}{\text{vuosi}}} \cdot \left(1 - e^{-\ln(1,06) \frac{1}{\text{vuosi}} \cdot 2,5 \text{vuosi}}\right) + \dots \\ &= \frac{1200 \text{€}}{\ln(1,06)} \cdot \left(1 - \frac{1}{1,06^{2,5}}\right) = 2791.73 \text{€} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} NA &= \frac{k}{\rho}(1 - e^{-\rho t}) \\ &= \frac{100 \frac{\text{€}}{\text{kk}}}{\ln(1,06^{1/12}) \frac{1}{\text{kk}}} \cdot \left(1 - e^{-\ln(1,06^{1/12}) \frac{1}{\text{kk}} \cdot 30 \text{kk}}\right) \\ &= \frac{100 \text{€}}{\frac{1}{12} \cdot \ln(1,06)} \cdot \left(1 - \frac{1}{1,06^{\frac{1}{12} \cdot 30}}\right) = 2791.73 \text{€} \end{aligned}$$

2. Verrataan kahta projektia. Projektin A perusinvestointi on 2000€ ja se tuottaa kahden vuoden ajan 100€/kk. Projektin B perusinvestointi on 16000€ ja se tuottaa kymmenen vuoden ajan 200€/kk. Kassavirroissa on huomioitu vain liiketoiminnan tuotot ja kustannukset. Rahoitusmenoja ei ole vielä laskettu mukaan.

a) Laske projektien nettonykyarvot, kun laskentakorko on 8% (todellinen vuosikorko). Ovatko projektit kannattavia?

b) Suhteellinen nykyarvo määritellään kaavalla:

suhteellinen nykyarvo =  $SNA = (\text{tulovirran nykyarvo})/(\text{kustannusvirran nykyarvo})$ .

Laske tehtävän projekteille A ja B suhteelliset nettonykyarvot. Kumpi projekteista on kannattavampi?

a) *Ratkaisu:*

$$\begin{aligned} NNA_A &= -2000\text{€} - \sum_{j=1}^{24} \frac{100\text{€}}{(1,08^{1/12})^j} \\ &= -2000\text{€} - \frac{100\text{€}}{1,08^{1/12}} \cdot \left( \frac{1 - (1,08^{-1/12})^{24}}{1 - (1,08^{-1/12})} \right) = 217,29\text{€} > 0\text{€} \text{ (ok)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} NNA_B &= -16000\text{€} - \sum_{j=1}^{120} \frac{200\text{€}}{(1,08^{1/12})^j} \\ &= -16000\text{€} - \frac{200\text{€}}{1,08^{1/12}} \cdot \left( \frac{1 - (1,08^{-1/12})^{120}}{1 - (1,08^{-1/12})} \right) = 686,48\text{€} > 0\text{€} \text{ (ok)} \end{aligned}$$

Kumpikin projekti on kannattava (8% laskentakorolla).

B-projektin nettonykyarvo on suurempi (kolminkertainen), mutta silti tulos tuntuu B:n kannalta lievältä pettymykseltä, sillä B-projektissa kiinnitettiin kahdeksankertainen pääoma, ja tuottoja odotettiin 10 vuotta!

b)

$$SNA_A = \frac{2217,29\text{€}}{2000\text{€}} = 1,1086 > 1 \text{ (ok)}$$

$$SNA_B = \frac{16686,48\text{€}}{16000\text{€}} = 1,0429 > 1 \text{ (ok)}$$

Kumpikin projekti on kannattava (8% laskentakorolla). Projekti A on suhteellisesti parempi ( $SNA_A > SNA_B$ ).

3. a) Laske Excelin IRR-funktion avulla tehtävän 2 projekteille sisäiset korkokannat (per annum). Kumpi nyt tuntuu kannattavammalta?

b) Laske pääoman tuottoasteet  $ROI_{II}$  tehtävän 5 projekteille. (Tulokset eivät välttämättä ole järkeviä, sillä ROI on hyvä kannattavuuden mittari vain pitkälle projektille.) Kumpi nyt tuntuu kannattavammalta?

*Ratkaisu:*

Projektin A perusinvestointi on 2 000€ ja se tuottaa kahden vuoden ajan 100€/kk.

Projektin B perusinvestointi on 16 000€ ja se tuottaa kymmenen vuoden ajan 200€/kk.

a) Excelin laskemat jaksoon (kk) liittyvät sisäiset korkokannat ovat  $IRR_{kk,A} = 1,513\%$  ja  $IRR_{kk,B} = 0,724\%$ . Vuosijakson sisäiset korkokannat ovat silloin.

$$IRR_{a,A} = (1,01513)^{12} - 1 = 0,19747 \quad \rightarrow i_{sis,A} = 19,75\%$$

$$IRR_{a,B} = (1,00724)^{12} - 1 = 0,09044 \quad \rightarrow i_{sis,B} = 9,04\%$$

Projekti A antaa tuoton nopeammin ja antaa paremman koron sijoitetulle pääomalle. Se on siis kiistatta parempi.

b)

$$a) \quad ROI_{II,A} = \frac{1\,200\text{€}}{2\,000\text{€}} \cdot 100\% = 60\%,$$

$$ROI_{II,B} = \frac{2\,400\text{€}}{16\,000\text{€}} \cdot 100\% = 15\%.$$

ROI antaa nyt selvästi liian isoja arvoja. (Kannattavuutta ei kannat nyt ratkaista näiden perusteella.)

4. Laske takaisinmaksuajat tehtävän 5 projekteille. Kumpi nyt tuntuu kannattavammalta?

*Ratkaisu:*

Projektin A perusinvestointi on 2 000€ ja se tuottaa kahden vuoden ajan 100€/kk.

Projektin B perusinvestointi on 16 000€ ja se tuottaa kymmenen vuoden ajan 200€/kk.

Takaisinmaksuaika on  $n = \frac{\ln(k/(k - iH))}{\ln(1 + i)}$ .

$$n_A = \frac{\ln(100\text{€}/(100\text{€} - (1,08^{1/12} - 1) \cdot 2000\text{€}))}{\ln(1,08^{1/12})} = 21,5\text{kk} = 1\text{ vuosi } 9,5\text{kk}$$

$$n_B = \frac{\ln(200\text{€}/(200\text{€} - (1,08^{1/12} - 1) \cdot 16000\text{€}))}{\ln(1,08^{1/12})} = 112,7\text{kk} = 9\text{ vuotta } 4,7\text{kk}$$

Ainakin kumpikin projekti on kannattava siinä mielessä, että ne maksavat itsensä takaisin. Koska projektien kestot ovat erilaisia, niiden vertailu ei ole helppoa takaisinmaksuajan perusteella.

## Kaavoja: Korkolasku

yksinkertainen korkolasku:  $K_t = (1 + it)K_0 = (1 + \frac{p}{100}t)K_0$ , kun  $0 < t < 1$

koronkorkolasku:  $K_t = (1 + i)^t K_0$ , kun  $t = 1, 2, 3, \dots$

jatkuva korkolasku:  $K_t = (1 + i)^t K_0 = e^{pt} K_0$ , kun  $t > 1$  ja  $(1 + i) = e^p$

## Jaksolliset suoritukset prolongointitekijä, diskonttaustekijä, kuoletuskerroin

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \quad a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}, \quad c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

## Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$k = c_{n,i}K_0, \quad k = c_{n,i}(H - h + m)$$

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

## Kassavirran nettonykyarvo

$$NPV = k_0 + \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{(1+i)^j}$$

## Projektin nettonykyarvo

$$NPV = -H + \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{(1+i)^j}$$

## Pääoman tuottoaste

$$ROI^I = \frac{\text{nettovuositulos}}{\text{keskimäärin sidottu pääoma}} \cdot 100\%$$
$$ROI^{II} = \frac{\text{nettovuositulos}}{\text{alussa sidottu pääoma}} \cdot 100\%$$

## Takaisinmaksu-aika

$$n = \frac{\ln(k/(k - iH))}{\ln(1 + i)}$$