

## Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

### 4. harjoitus, viikko 6 (6.2.–10.2.2017)

|    |    |       |      |    |    |       |      |
|----|----|-------|------|----|----|-------|------|
| R1 | ma | 12–14 | F249 | R5 | ti | 14–16 | F453 |
| R2 | ma | 14–16 | F453 | R6 | to | 12–14 | F140 |
| R3 | ti | 08–10 | F425 | R7 | to | 08–10 | F425 |
| R4 | ti | 12–14 | F453 | R8 | pe | 10–12 | F249 |

Viikon 6 luennot ma 10–12 A202 ja pe 8–10 A202

1. Kirjoita seuraavien summien kaikki termit näkyviin ja laske summa sitten sopivalla kaavalla

$$a) \sum_{k=5}^7 (4 \cdot 1,05^k), \quad b) \sum_{k=5}^7 (1,05 \cdot k), \quad c) \sum_{k=5}^7 \left( \frac{4}{1,05^k} \right)$$

Ratkaisu: a: geometrinen, b: aritmeettinen, c: geometrinen

$$a) \sum_{k=5}^7 (4 \cdot 1,05^k) = 4 \cdot 1,05^5 + 4 \cdot 1,05^6 + 4 \cdot 1,05^7 = 4 \cdot 1,05^5 \cdot \frac{(1 - 1,05^3)}{(1 - 1,05)}$$

$$= 16,0939105 \approx 16,1$$

$$b) \sum_{k=5}^7 (1,05 \cdot k) = 1,05 \cdot 5 + 1,05 \cdot 6 + 1,05 \cdot 7 = 3 \cdot \frac{1,05 \cdot 5 + 1,05 \cdot 7}{2}$$

$$= 18,9$$

$$c) \sum_{k=5}^7 \left( \frac{4}{1,05^k} \right) = \frac{4}{1,05^5} + \frac{4}{1,05^6} + \frac{4}{1,05^7} = \frac{4}{1,05^5} \cdot \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{1,05}\right)^3}{1 - \frac{1}{1,05}} \right)$$

$$= 8,9616915729 \approx 8,96$$

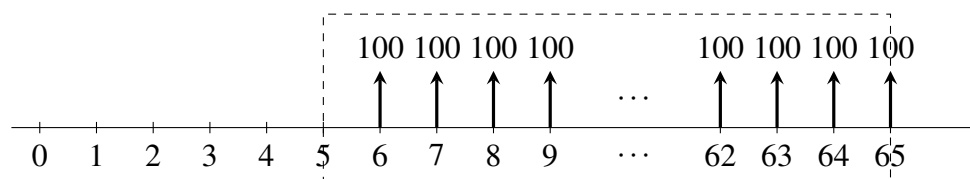
2. Opiskelija saa isoisältä taskurahaa 100€ kuukaudessa viiden vuoden ajan. Ensimmäisen taskurahan opiskelija saa kuudennen kuukauden lopussa opintojen alkaessa. Jos laskentakorko on 2,75% (todellinen vuosikorko), niin tuloviran nykyarvo on

$$NPV_{60} = \sum_{k=6}^{65} \frac{100\text{€}}{(1+i)^k} = \frac{a_{60,i}}{(1+i)^5} \cdot 100\text{€}, \quad (1+i)^{12} = 1.0275$$

Laske opiskelijan saaman taskuraha-virran nykyarvo.

Ratkaisu:

$$(1+i)^{12} = 1.0275 \Rightarrow \begin{cases} 1+i = 1.0275^{1/12} \\ i = 1.0275^{1/12} - 1 \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 NPV_{60} &= \sum_{k=6}^{65} \frac{100\text{€}}{(1+i)^k} = \frac{100\text{€}}{(1+i)^6} \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^{60}\right)}{\left(1 - \frac{1}{1+i}\right)} = \frac{100\text{€}}{(1.0275^{1/12})^6} \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{1.0275^{1/12}}\right)^{60}\right)}{\left(1 - \frac{1}{1.0275^{1/12}}\right)} \\
 &= \frac{100\text{€}}{(1.0275^{6/12})} \cdot \frac{\left(1 - 1.0275^{-60/12}\right)}{\left(1 - 1.0275^{-1/12}\right)} = 5541.527188\text{€} \approx 5541.53\text{€}
 \end{aligned}$$

Toinen tehtävässä annettu kaava antaa tuloksen

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{60,i} \cdot 100\text{€}}{(1+i)^5} &= \frac{\frac{((1+i)^n - 1)}{i \cdot (1+i)^n} \cdot 100\text{€}}{(1+i)^5} = \frac{((1.0275^{60/12}) - 1)}{[1.0275^{1/12} - 1] \cdot (1.0275^{60/12})} \cdot \frac{100\text{€}}{1.0275^{5/12}} \\
 &= 5541.527188\text{€} \approx 5541.53\text{€}
 \end{aligned}$$

*Vastaus:* Tulovirran nykyarvo on 5541.53€.

**3.** Laske annuiteettilainan tasaerä (kuukausierä), kun lainan määrä on 4500€, todellinen vuosikorko on 2.75% ja laina-aika on 18 kuukautta.

*Ratkaisu:*

$$(1+i)^{12} = 1.0275 \Rightarrow \begin{cases} 1+i = 1.0275^{1/12} \\ i = 1.0275^{1/12} - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 k &= cK_0 = \frac{i \cdot (1+i)^n}{((1+i)^n - 1)} \cdot K_0 \\
 &= \frac{[1.0275^{1/12} - 1] \cdot 1.0275^{18/12}}{(1.0275^{18/12} - 1)} \cdot 4500\text{€} \\
 &= 255.41\text{€}
 \end{aligned}$$

(Tarkistus:  $18 \times 255.41\text{€} = 4597.38\text{€}$ , Ok)

*Vastaus:* Lainan kuukausierä on 255.41€.

**4.** Yrittäjä rakentaa uutta tuotantolinjaa, jonka loppuun tulee pakkauslaite. Saatujen tarjousten perusteella on olemassa kolme mahdollista pakkauslaitetta. Mikä laitteista on mielestäsi edullisin, kun tuotantolinja on toiminnassa toistaiseksi (ainakin 30 vuotta) ja laskentakorkona on 7,50% (todellinen vuosikorko).

| laite | hankintahinta (€) | käyttökustannus (€/kk) | käyttöikä (vuotta) |
|-------|-------------------|------------------------|--------------------|
| A-pak | 7 000             | 30                     | 3                  |
| Narux | 5 000             | 70                     | 2                  |
| Hippo | 4 000             | 100                    | 3                  |

*Ratkaisu:* Lasketaan ensin kahden vuoden ja kolmen vuoden lainoille kuoletuskertoimet

2 vuoden lainan kuoletuskerroin

$$c_2 = \frac{i \cdot (1+i)^{24}}{((1+i)^{24} - 1)} = \frac{[1.075^{1/12} - 1] \cdot 1.075^{24/12}}{(1.075^{24/12} - 1)} = 0.044887772$$

3 vuoden lainan kuoletuskerroin

$$c_3 = \frac{i \cdot (1+i)^{36}}{((1+i)^{36} - 1)} = \frac{[1.075^{1/12} - 1] \cdot 1.075^{36/12}}{(1.075^{36/12} - 1)} = 0.030993317$$

| laite | pääomakust/kk            | + | käyttökust/kk | = | kok.kust/kk   |
|-------|--------------------------|---|---------------|---|---------------|
| A-pak | $c_3 \cdot 7000\text{€}$ | + | 30.00€        | = | 246.95 (€/kk) |
| Narux | $c_2 \cdot 5000\text{€}$ | + | 70.00€        | = | 294.44 (€/kk) |
| Hippo | $c_3 \cdot 4000\text{€}$ | + | 100.00€       | = | 223.97 (€/kk) |

*Vastaus:* Edullisin laite on Hippo.

**5.** Laske osamaksuerä, kun käteishinta on 15000€, käsiraha on 3000€, osamaksulisä on 500€. Osamaksuerät maksetaan kuukausittain. Maksuaika on 15 kuukautta ja todellinen vuosikorko on 5.25%.

*Ratkaisu:*

|                    |                         |
|--------------------|-------------------------|
| Käteishinta        | $H = 15000\text{€}$     |
| Käsiraha           | $h = 3000\text{€}$      |
| Osamaksulisä       | $m = 500\text{€}$       |
| Laina-aika         | $n = 15$ (kk)           |
| Tod. vuosikorko    | $p\% = 5.25\%$          |
| Kuukausikorkokanta | $i = 1.0525^{1/12} - 1$ |

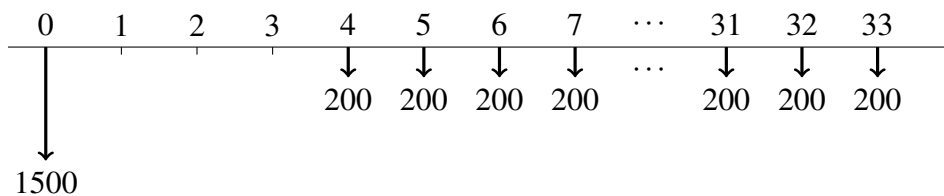
Osamaksuerä on  $k = c(H - h + m)$

$$\begin{aligned} k &= \frac{i \cdot (1+i)^n}{((1+i)^n - 1)} \cdot (H - h + m) \\ &= \frac{[1.0525^{1/12} - 1] \cdot 1.0525^{15/12}}{(1.0525^{15/12} - 1)} \cdot (12500\text{€}) \\ &= 862.10\text{€} \end{aligned}$$

*Vastaus:* Osamaksuerä on 862.10€.

**6.** Yritys solmii sopimuksen, jonka mukaan yritys maksaa sopimuksen allekirjoituspäivänä 1500€. Lisäksi kuukausittain maksetaan 200€:iin, että kuukausimaksut alkavat 3 kuukautta allekirjoittamisen jälkeen (eli ensimmäinen 200€-maksu maksetaan 4 kuukautta sopimuksen solmimisesta) ja kuukausierää maksetaan 30 (2,5 vuotta). Laske maksuvirran nykyarvo, kun laskentakorko (todellinen vuosikorko) on 3.15%.

*Ratkaisu:* 1500€ maksetaan heti (hetkellä 0), ensimmäinen 200€ maksetaan neljännen kuukausijakson lopussa (hetkellä 4) ja viimeinen 200€ maksetaan 33:n kuukausijakson lopussa (hetkellä 33).



$$NPV = 1500\text{€} + \sum_{k=4}^{33} \frac{200\text{€}}{(1.0315^{1/12})^k} = 1500\text{€} + \frac{200\text{€}}{(1.0315^{4/12})} \cdot \frac{(1 - (1.0315^{-1/12})^{30})}{(1 - 1.0315^{-1/12})}$$

$$= 7221.30\text{€}$$

Vastaus: Maksuvirran nykyarvo on 7221.30€

7. Tarkista tehtävässä 6 saatu nykyarvo Excelin NPV-funktiolla. Tehtävän 6 yritys pystyy sopimuksen ansiosta aloittamaan liiketoiminnan, joka tuottaa nettotulosta 215 euroa kuukaudessa. Nettotulo alkaa heti ja kestää kolme vuotta (36kk). (Em. maksut eivät ole tässä mukana.) Arvioi projektin sisäistä korkokantaa Excelin IRR-funktiolla.

Ratkaisu:

|    | A        | B           | C          | D        | E       | F                         | G |
|----|----------|-------------|------------|----------|---------|---------------------------|---|
| 3  | i_tod =  | 0.0315      |            |          |         |                           |   |
| 4  | i_kk =   | 0.002587847 |            |          |         |                           |   |
| 5  | 1+i_kk = | 1.002587847 |            |          |         |                           |   |
| 6  | '- meno  | '+ tulo     | '= netto   |          |         |                           |   |
| 7  | NPV =    | -7.221.30 € | 7,381.29 € | 159.99 € | IRR =   | 0.8485285%                |   |
| 8  |          |             |            |          | i_sis = | 10.67%                    |   |
| 9  | n        |             |            |          |         |                           |   |
| 10 | 0        | -1500       | 0          | -1500    | solu    | kaava                     |   |
| 11 | 1        | 0           | 215        | 215      | B5      | '=(1+B3)^(1/12)           |   |
| 12 | 2        | 0           | 215        | 215      | B4      | '=B5-1                    |   |
| 13 | 3        | 0           | 215        | 215      | B7      | '=B10+NPV(\$B\$4,B11:B46) |   |
| 14 | 4        | -200        | 215        | 15       | C7      | '=C10+NPV(\$B\$4,C11:C46) |   |
| 15 | 5        | -200        | 215        | 15       | D7      | '=D10+NPV(\$B\$4,D11:D46) |   |
| 16 | 6        | -200        | 215        | 15       | F7      | '=IRR(D10:D46)            |   |
| 17 | 7        | -200        | 215        | 15       | F8      | '=(1+F7)^12-1             |   |
| 18 | 8        | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 19 | 9        | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 20 | 10       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 21 | 11       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 22 | 12       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 23 | 13       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 24 | 14       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 25 | 15       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 26 | 16       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 27 | 17       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 28 | 18       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 29 | 19       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 30 | 20       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 31 | 21       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 32 | 22       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 33 | 23       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 34 | 24       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 35 | 25       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 36 | 26       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 37 | 27       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 38 | 28       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 39 | 29       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 40 | 30       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 41 | 31       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 42 | 32       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 43 | 33       | -200        | 215        | 15       |         |                           |   |
| 44 | 34       | 0           | 215        | 215      |         |                           |   |
| 45 | 35       | 0           | 215        | 215      |         |                           |   |
| 46 | 36       | 0           | 215        | 215      |         |                           |   |
| 47 |          |             |            |          |         |                           |   |

Vastaus: Tehtävän 6 nykyarvo on oikein ja koko projektin (myös tuotot huomioidaan) sisäinen korkokanta on 10.7%.

Huomautus tehtävän 7 Excel-pohjaan. Excel pohja löytyy osoitteesta

[www.uva.fi/~mla/orms1030/h4t7.xls](http://www.uva.fi/~mla/orms1030/h4t7.xls)

Jos kirjoitat Excel-tilun itse, niin huomaa että NPV-funktiolle annetaan kaksi argumenttia ja niiden väliin tuleva erotin (joko pilkku [,] tai puolipiste [;]) riippuu ohjelmaa määsasetuksista. Kun olet kirjoittanut funktion alun "NPV( " ohjelma näyttää kohdistimen alapuolella syntaksi-ohjeen, josta näet oikean erottimen.

Kaavoja: **Kysynnän hintajousto:**

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \text{jousto}, \quad MR = p \left( 1 + \frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}} \right)$$

yksinkertainen korkolasku:  $K_t = (1 + it)K_0 = \left(1 + \frac{p}{100}t\right)K_0$ , kun  $0 < t < 1$

koronkorkolasku:  $K_t = (1 + i)^t K_0$ , kun  $t = 1, 2, 3, \dots$

jatkuva korkolasku:  $K_t = (1 + i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0$ , kun  $t > 1$  ja  $(1 + i) = e^\rho$

### Jaksolliset suoritukset

$$\text{prolongointitekijä } s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\text{diskonttaustekijä } a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$\text{kuoletuskerroin } c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

### Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\text{annuiteetti } k = c_{n,i} K_0$$

$$\text{osamaksuerä } k = c_{n,i}(H - h + m)$$

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$