



## Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

Opettaja: Matti Laaksonen



### A1. välikoe torstaina 16.2.2017

**Ratkaise 3 tehtävää.** Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava). Kun teet tehtävän, niin käsittele kaikki sen alakohdat.

- A1.** (a) Laske 3,25% todelliseen vuosikorkoon liittyvä kuukausikorkokanta.  
(b) Mikä on todellinen vuosikorko, kun kuukausikorkokanta on 0.0017579038?  
(c) Laske tasaerälainan annuiteetti, kun lainan määrä on 2000€, laina-aika on 15 kuukautta, laina hoidetaan kuukausierinä, ja lainaan liittyvä todellinen vuosikorko on 4,15%.

**A2.** Yritys valmistaa erällä tuotantolinjallaan  $q$  tuotetta kuukaudessa. Valmistettavan tuotteen kysyntäfunktio on  $p = 20 - 0.030q$  ja vastaava kustannusfunktio on  $C(q) = 0.02q^2 + 5q + 100$ . Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen? Mikä on maksimivoitto.

**A3.** Yrittäjä ostaa koneen ja aloittaa uuden tuotantolinjan. Koneen ostohinta on 25000€. Koneen asentaminen ja koekäyttö kestää kaksi kuukautta ja sitoo kaksi työntekijää, joiden palkkameno asennusjaksolta on 2000€/kk/hlö. Asennusjakson jälkeen alkaa tuotanto, joka tuottaa yrittäjälle nettotuloa 700€/kk. Mikä on projektin nykyarvo, kun laskentakorkona on 8,00%(todellinen vuosikorko)? *Projektin koko kesto on 6 vuotta (70kk nettotuloa).*

- A4.** (a) (2p) Selitä lyhyesti sanallisesti, mitä tarkoittaa ja miten lasketaan  $y:n$  jousto  $x:n$  suhteen. Voit antaa lausekkeenkin, mutta tärkeämpää on nyt antaa sanallinen kuvaus asiasta.  
b) (3p) Erään tuotteen kysynnän hintajousto on  $-1.55$ . Tuotteen hinta on nyt 10,25€/kpl ja sen kysyntä on 1200kpl/kk. Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen hintaa lasketaan 0.50 eurolla?  
c) (1p) Tuotteen kysynnän hintajousto on  $-2.10$ . Voiko tehtävässä annetuilla tiedoilla ratkaista, oliko hinnan muutos kannattava? Miten?

## Kaavoja:

### Kysynnän hintajousto:

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \text{jousto}, \quad MR = p \left( 1 + \frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}} \right)$$

### Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} (f(x_1) - f(x_0))$$

### Jaksolliset suoritukset

$$\begin{aligned} \text{prolongointitekijä } s_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ \text{diskonttaustekijä } a_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \\ \text{kuoletuskerroin } c_{n,i} &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \end{aligned}$$

### Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\text{annuiteetti } k = c_{n,i} K_0, \quad \text{osamaksuerä } k = c_{n,i} (H - h + m)$$

### Derivaatta ja 2. asteen yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(ax^n) &= nax^{n-1} \\ ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

### Korkokaavat

yksinkertainen korkolasku:

$$K_t = (1 + it)K_0 = \left(1 + \frac{p}{100}t\right)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

koronkorkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0, \text{ kun } t = 1, 2, 3, \dots$$

jatkuva korkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1 + i) = e^{\rho}$$

### Summakaavat:

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$



## Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

Opettaja: Matti Laaksonen

**B**

### 1. välikoe torstaina 16.2.2017

**Ratkaise 3 tehtävää.** Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava). Kun teet tehtävän, niin käsittele kaikki sen alakohdat.

**B1.** (a) Laske 2,17% todelliseen vuosikorkoon liittyvä kuukausikorkokanta.  
(b) Mikä on todellinen vuosikorko, kun kuukausikorkokanta on 0.0026930832?  
(c) Laske tasaerälainan annuiteetti, kun lainan määrä on 1 000€, laina-aika on 18 kuukautta, laina hoidetaan kuukausierinä, ja lainaan liittyvä todellinen vuosikorko on 3,15%.

**B2.** Yritys valmistaa erällä tuotantolinjallaan  $q$  tuotetta kuukaudessa. Valmistettavan tuotteen kysyntäfunktio on  $p = 20 - 0.030q$  ja vastaava kustannusfunktio on  $C(q) = 0.02q^2 + 5q + 100$ . Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen? Mikä on maksimivoitto.

**B3.** Yrittäjä ostaa koneen ja aloittaa uuden tuotantolinjan. Koneen ostohinta on 30000€. Koneen asentaminen ja koekäyttö kestää kaksi kuukautta ja sitoo kaksi työntekijää, joiden palkkameno asennusjaksolta on 2000€/kk/hlö. Asennusjakson jälkeen alkaa tuotanto, joka tuottaa yrittäjälle nettotuloa 700€/kk. Mikä on projektin nykyarvo, kun laskentakorkona on 5,00%(todellinen vuosikorko)? *Projektin koko kesto on 6 vuotta (70kk nettotuloa).*

**B4.** (a) (2p) Selitä lyhyesti sanallisesti, mitä tarkoittaa ja miten lasketaan  $y:n$  jousto  $x:n$  suhteen. Voit antaa lausekkeenkin, mutta tärkeämpää on nyt antaa sanallinen kuvaus asiasta.  
b) (3p) Erään tuotteen kysynnän hintajousto on  $-2.15$ . Tuotteen hinta on nyt 13,50€/kpl ja sen kysyntä on 1 000kpl/kk. Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen hintaa nostetaan 0.50 eurolla?  
c) (1p) Tuotteen kysynnän hintajousto on  $-2.10$ . Voiko tehtävässä annetuilla tiedoilla ratkaista, oliko hinnan muutos kannattava? Miten?

## Kaavoja:

### Kysynnän hintajousto:

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \text{jousto}, \quad MR = p \left( 1 + \frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}} \right)$$

### Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} (f(x_1) - f(x_0))$$

### Jaksolliset suoritukset

$$\text{prolongointitekijä } s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\text{diskonttaustekijä } a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$\text{kuoletuskerroin } c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

### Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\text{annuiteetti } k = c_{n,i} K_0,$$

$$\text{osamaksuerä } k = c_{n,i} (H - h + m)$$

### Derivaatta ja 2. asteen yhtälö

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Korkokaavat

yksinkertainen korkolasku:

$$K_t = (1 + it)K_0 = \left(1 + \frac{p}{100}t\right)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

koronkorkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0, \text{ kun } t = 1, 2, 3, \dots$$

jatkuva korkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1 + i) = e^{\rho}$$

### Summakaavat:

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$



## Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

Opettaja: Matti Laaksonen

C

### 1. välikoe torstaina 16.2.2017

**Ratkaise 3 tehtävää.** Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava). Kun teet tehtävän, niin käsittele kaikki sen alakohdat.

**C1.** (a) Laske 4,05% todelliseen vuosikorkoon liittyvä kuukausikorkokanta.  
(b) Mikä on todellinen vuosikorko, kun kuukausikorkokanta on 0.0031369734?  
(c) Laske tasaerälainan annuiteetti, kun lainan määrä on 2400€, laina-aika on 9 kuukautta, laina hoidetaan kuukausierinä, ja lainaan liittyvä todellinen vuosikorko on 2,15%.

**C2.** Yritys valmistaa erällä tuotantolinjallaan  $q$  tuotetta kuukaudessa. Valmistettavan tuotteen kysyntäfunktio on  $p = 20 - 0.030q$  ja vastaava kustannusfunktio on  $C(q) = 0.02q^2 + 5q + 100$ . Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen? Mikä on maksimivoitto.

**C3.** Yrittäjä ostaa koneen ja aloittaa uuden tuotantolinjan. Koneen ostohinta on 20000€. Koneen asentaminen ja koekäyttö kestää kaksi kuukautta ja sitoo kaksi työntekijää, joiden palkkameno asennusjaksolta on 2000€/kk/hlö. Asennusjakson jälkeen alkaa tuotanto, joka tuottaa yrittäjälle nettotuloa 500€/kk. Mikä on projektin nykyarvo, kun laskentakorkona on 4,00%(todellinen vuosikorko)? *Projektin koko kesto on 6 vuotta (70kk nettotuloa).*

**C4.** (a) (2p) Selitä lyhyesti sanallisesti, mitä tarkoittaa ja miten lasketaan  $y:n$  jousto  $x:n$  suhteen. Voit antaa lausekkeenkin, mutta tärkeämpää on nyt antaa sanallinen kuvaus asiasta.  
b) (3p) Erään tuotteen kysynnän hintajousto on  $-1.45$ . Tuotteen hinta on nyt 15,50€/kpl ja sen kysyntä on 1500kpl/kk. Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen hintaa lasketaan 1.50 eurolla?  
c) (1p) Tuotteen kysynnän hintajousto on  $-2.10$ . Voiko tehtävässä annetuilla tiedoilla ratkaista, oliko hinnan muutos kannattava? Miten?

## Kaavoja:

### Kysynnän hintajousto:

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \text{jousto}, \quad MR = p \left( 1 + \frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}} \right)$$

### Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} (f(x_1) - f(x_0))$$

### Jaksolliset suoritukset

$$\text{prolongointitekijä } s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\text{diskonttaustekijä } a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$\text{kuoletuskerroin } c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

### Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\text{annuiteetti } k = c_{n,i} K_0,$$

$$\text{osamaksuerä } k = c_{n,i} (H - h + m)$$

### Derivaatta ja 2. asteen yhtälö

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Korkokaavat

yksinkertainen korkolasku:

$$K_t = (1 + it)K_0 = \left(1 + \frac{p}{100}t\right)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

koronkorkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0, \text{ kun } t = 1, 2, 3, \dots$$

jatkuva korkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0 = e^{pt} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1 + i) = e^p$$

### Summakaavat:

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$



## Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

Opettaja: Matti Laaksonen

**D**

### D1. välikoe torstaina 16.2.2017

**Ratkaise 3 tehtävää.** Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava). Kun teet tehtävän, niin käsittele kaikki sen alakohdat.

- D1.** (a) Laske 5,35% todelliseen vuosikorkoon liittyvä kuukausikorkokanta.  
(b) Mikä on todellinen vuosikorko, kun kuukausikorkokanta on 0.0034103014?  
(c) Laske tasaerälainan annuiteetti, kun lainan määrä on 1 800€, laina-aika on 16 kuukautta, laina hoidetaan kuukausierinä, ja lainaan liittyvä todellinen vuosikorko on 5,15%.

**D2.** Yritys valmistaa erällä tuotantolinjallaan  $q$  tuotetta kuukaudessa. Valmistettavan tuotteen kysyntäfunktio on  $p = 20 - 0.030q$  ja vastaava kustannusfunktio on  $C(q) = 0.02q^2 + 5q + 100$ . Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen? Mikä on maksimivoitto.

**D3.** Yrittäjä ostaa koneen ja aloittaa uuden tuotantolinjan. Koneen ostohinta on 23 000€. Koneen asentaminen ja koekäyttö kestää kaksi kuukautta ja sitoo kaksi työntekijää, joiden palkkameno asennusjaksolta on 2000€/kk/hlö. Asennusjakson jälkeen alkaa tuotanto, joka tuottaa yrittäjälle nettotuloa 600€/kk. Mikä on projektin nykyarvo, kun laskentakorkona on 6,00%(todellinen vuosikorko)? *Projektin koko kesto on 6 vuotta (70kk nettotuloa).*

- D4.** (a) (2p) Selitä lyhyesti sanallisesti, mitä tarkoittaa ja miten lasketaan  $y:n$  jousto  $x:n$  suhteen. Voit antaa lausekkeenkin, mutta tärkeämpää on nyt antaa sanallinen kuvaus asiasta.  
b) (3p) Erään tuotteen kysynnän hintajousto on  $-1.80$ . Tuotteen hinta on nyt 13,50€/kpl ja sen kysyntä on 1 100kpl/kk. Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen hintaa lasketaan 1.50 eurolla?  
c) (1p) Tuotteen kysynnän hintajousto on  $-2.10$ . Voiko tehtävässä annetuilla tiedoilla ratkaista, oliko hinnan muutos kannattava? Miten?

## Kaavoja:

### Kysynnän hintajousto:

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \text{jousto}, \quad MR = p \left( 1 + \frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}} \right)$$

### Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} (f(x_1) - f(x_0))$$

### Jaksolliset suoritukset

$$\begin{aligned} \text{prolongointitekijä } s_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ \text{diskonttaustekijä } a_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \\ \text{kuoletuskerroin } c_{n,i} &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \end{aligned}$$

### Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\text{annuiteetti } k = c_{n,i} K_0, \quad \text{osamaksuerä } k = c_{n,i} (H - h + m)$$

### Derivaatta ja 2. asteen yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(ax^n) &= nax^{n-1} \\ ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

### Korkokaavat

yksinkertainen korkolasku:

$$K_t = (1 + it)K_0 = \left(1 + \frac{p}{100}t\right)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

koronkorkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0, \text{ kun } t = 1, 2, 3, \dots$$

jatkuva korkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0 = e^{pt} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1 + i) = e^p$$

### Summakaavat:

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$