Vaasan yliopisto
UNIVERSITY OF VAASA

kevät 2017

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

Opettaja: Matti Laaksonen

A

A1. välikoe torstaina 16.2.2017

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava). Kun teet tehtävän, niin käsittele kaikki sen alakohdat.

A1. (a) Laske 3,25% todelliseen vuosikorkoon liittyvä kuukausikorkokanta.
(b) Mikä on todellinen vuosikorko, kun kuukausikorkokanta on 0.0017579038?
(c) Laske tasaerälainan annuiteetti, kun lainan määrä on 2 000 €, laina-aika on 15 kuukautta, laina hoidetaan kuukausierinä, ja lainaan liittyvä todellinen vuosikorko on 4,15%.

Ratkaisu: a)

$$
\begin{aligned}
(1+i_{kk})^{12} &= 1.0325 \\
\Leftrightarrow 1+i_{kk} &= 1.0325^{1/12} \\
\Leftrightarrow i_{kk} &= 1.0325^{1/12}-1 = 0.002668808768
\end{aligned}
$$

b)

$$
(1+i_{tod}) = 1.0017579038^{12} = 1.021299991
$$
$$
\longrightarrow \text{todellinen vuosikorko on } 2.13\,\%
$$

c)

$$
k = \frac{i\cdot(1+i)^n}{((1+i)^n-1)}\cdot K_0 = \frac{[1.0415^{1/12}-1]\cdot 1.0415^{15/12}}{(1.0415^{15/12}-1)}\cdot 2000\,€ = 136.98\,€
$$

(Tarkistus: $15\cdot 136.98\,€ = 2054.70\,€$, OK)

c-kohdassa voi myös käyttää kaavaa

$$
\begin{aligned}
k &= K\cdot q^n\cdot\frac{(1-q)}{(1-q^n)}, \quad \text{missä} \quad q = 1+i = 1.0415^{1/12} \\
&= 2000\,€\cdot 1.0415^{15/12}\cdot\frac{(1-1.0415^{1/12})}{(1-1.0415^{15/12})} = 136.98\,€
\end{aligned}
$$

Vastaus: a) kuukausikorkokanta on 0.002668808768, b) todellinen vuosikorko on 2.13 %, c) kuukausierä on 136.98 €.

Muiden tehtäväversioiden vastaukset:
B: a) 0.001790593419, b) 3.28 %, c) 56.93 €.
C: a) 0.003313926190, b) 3.83 %, c) 269.04 €.
D: a) 0.004352608056, b) 4.17 %, c) 116.55 €.

A2. Yritys valmistaa eräällä tuotantolinjallaan q tuotetta kuukaudessa. Valmistettavan tuotteen kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.030q$ ja vastaava kustannusfunktio on $C(q) = 0.02q^2 + 6q + 100$. Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen? Mikä on maksimivoitto.

Ratkaisu: Myynnistä saatu tuotto ja sen derivaatta:

$$\begin{array}{lll} & \text{kysyntäfunktio} & p = 20 - 0.030q \\ \to & \text{tuottofunktio} & R = 20q - 0.030q^2 \\ \to & \text{rajatuotto} & MR = 20 - 0.06q \end{array}$$

Kustannusfunktio ja sen derivaatta:

$$\begin{array}{lll} & \text{kustannusfunktio} & C = 0.02q^2 + 6q + 100 \\ \to & \text{rajakustannus} & MC = 0.04q + 6 \end{array}$$

Optimissa:

$$\begin{aligned} & MC = MR \\ \Leftrightarrow\quad & 0.04q + 6 = 20 - 0.06q \\ \Leftrightarrow\quad & 0.1q = 14 \qquad \| \cdot 10 \\ \Leftrightarrow\quad & q = 140 \end{aligned}$$

Voitto, kun valmistetaan 140 tuotetta kuukaudessa:

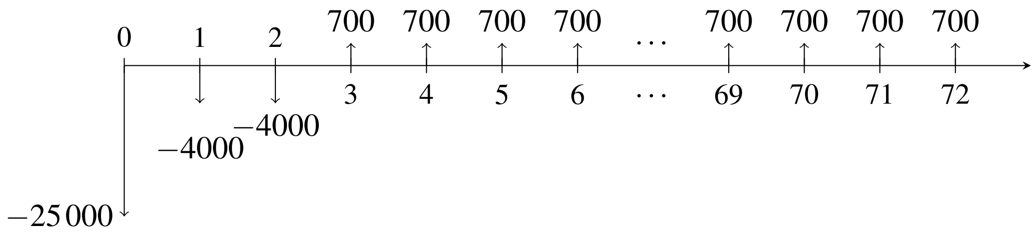
$$\begin{aligned} P(140) &= R(140) - C(140) \\ &= (20 \cdot 140 - 0.030 \cdot 140^2) - (0.02 \cdot 140^2 + 6 \cdot 140 + 100) \\ &= 2\,800 - 588 - 392 - 840 - 100 = 880 \text{ (€/kk)} \end{aligned}$$

Vastaus: Voitto on suurin mahdollinen, kun valmistetaan 140 tuotetta kuukaudessa. Voitto on silloin 880€ kuukaudessa.

(B,C ja D versioissa sama tehtävä ja sama vastaus.)

A3. Yrittäjä ostaa koneen ja aloittaa uuden tuotantolinjan. Koneen ostohinta on 25 000€. Koneen asentaminen ja koekäyttö kestää kaksi kuukautta ja sitoo kaksi työntekijää, joiden palkkameno asennusjaksolta on 2000€/kk/hlö. Asennusjakson jälkeen alkaa tuotanto, joka tuottaa yrittäjälle nettotuloa 700€/kk. Mikä on projektin nykyarvo, kun laskentakorkona on 8,00%(todellinen vuosikorko)? *Projektin koko kesto on 6 vuotta (70kk nettotuloa).*

Ratkaisu:



Pohjustusta:

$$1+i = 1.08^{1/12}, \quad \text{ja} \quad q = \frac{1}{1+i} = 1.08^{-1/12}$$

$$\begin{aligned}
NPV &= -25000€ + \frac{-4000€}{(1+i)} + \frac{-4000€}{(1+i)^2} + \sum_{k=3}^{72} \frac{700€}{(1+i)^k} \\
&= -25000€ + \frac{-4000€}{1.08^{1/12}} + \frac{-4000€}{(1.08^{1/12})^2} + \underbrace{\frac{700€}{(1.08^{1/12})^3} \cdot \frac{\left(1-(1.08^{-1/12})^{70}\right)}{(1-(1.08^{-1/12}))}}_{=a_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)}} \\
&= 5926.20€
\end{aligned}$$

Vastaus: Kassavirran nettonykyarvo on 5926.20€

Muiden tehtäväversioiden vastaukset: B: 4261.41€, C: 3069.38€, D: 4234.86€.

A4. (a) (1p) Selitä lyhyesti sanallisesti, mitä tarkoittaa ja miten lasketaan y:n jousto x:n suhteen. Voit antaa lausekkeenkin, mutta tärkeämpää on nyt antaa sanallinen kuvaus asiasta.
b) (3p) Erään tuotteen kysynnän hintajousto on -1.55. Tuotteen hinta on nyt 10,25 €/kpl ja sen kysyntä on 1 200 kpl/kk. Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen hintaa lasketaan 0.50 eurolla?
c) (2p) Miten b-kohdassa kuvattu hinnan muutos muuttaa myynnistä saatavaa tuottoa? Voiko b-kohdassa annettujen tietojen perusteella ratkaista, oliko hinnan muutos kannattava? Miten?

Ratkaisu:
a) Jos pieni muutos x:n arvossa aiheuttaa pienen muutoksen y:n arvossa, niin kytkennän vahvuutta voidaan mitata vertaamalla prosenttimuutoksia:
y:n jousto x:n suhteen on y:n prosenttimuutos jaettuna x:n prosenttimuutoksella.

$$\frac{\frac{\Delta y}{y}\cdot 100\%}{\frac{\Delta x}{x}\cdot 100\%}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}$$

b) Annetut tiedot

hinta nyt	$p = 10{,}25\,€/\text{kpl}$
hinnan muutos	$\Delta p = -0.50\,€/\text{kpl}$
kysyntä nyt	$q = 1\,200\,\text{kpl/kk}$
kysynnän muutos	$\Delta q = x$
kysynnän hintajousto	$\eta = -1.55$

$$\frac{\Delta q}{\Delta p}\cdot\frac{p}{q}=\eta \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x}{-0.50\,€/\text{kpl}}\cdot\frac{10{,}25\,€/\text{kpl}}{1\,200\,\text{kpl/kk}}=\frac{-1.55}{1} \qquad \|\text{'kerrotaan ristiin'}$$

$$\Leftrightarrow\quad x=\frac{-1.55\cdot(-0.50)\cdot 1\,200\,\text{kpl/kk}}{10{,}25}=90.7\,\text{kpl/kk}\approx 91\,\text{kpl/kk}$$

c)

tuotto ennen hinnan alennusta	$R_1 = 10.25\frac{€}{\text{kpl}}\cdot 1200\frac{\text{kpl}}{\text{kk}}$	=	12 300.00 €/kk
tuotto hinnan alennuksen jälkeen	$R_2 = 9.75\frac{€}{\text{kpl}}\cdot 1290.7\frac{\text{kpl}}{\text{kk}}$	=	12 584.33 €/kk
tuoton muutos	$R_2 - R_1$	=	284.33 €/kk

Hinnan muutoksen kannattavuudesta ei nyt voi sanoa mitään, koska emme voi arvioida kustannusten muutosta.

Vastaus: a) ks. yllä, b) Kysyntä kasvaa noin 91 tuotetta kuukaudessa (7.6%),
c) tuotto kasvaa 284.33 euroa kuukaudessa, mutta hinnan muutoksen kannattavuutta ei voida arvioida koska kustannusten muutosta ei tiedetä.

Muiden tehtäväversioiden vastaukset:
B: b) -80kpl/kk (-8.0%), c) $\Delta R = -614.81\,€/\text{kk}$,
C: b) 210kpl/kk (14.0%), c) $\Delta R = 696.77\,€/\text{kk}$,
D: b) 220kpl/kk (20.0%), c) $\Delta R = 990.00\,€/\text{kk}$.

Kaavoja:

Kysynnän hintajousto:

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \text{jousto}, \qquad MR = p\left(1 + \frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}}\right)$$

Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(f(x_1) - f(x_0))$$

Jaksolliset suoritukset

$$\begin{aligned} \text{prolongointitekijä } s_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ \text{diskonttaustekijä } a_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \\ \text{kuoletuskerroin } c_{n,i} &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \end{aligned}$$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\text{annuiteetti } k = c_{n,i}K_0, \qquad \text{osamaksuerä } k = c_{n,i}(H - h + m)$$

Derivaatta ja 2. asteen yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(ax^n) &= nax^{n-1} \\ ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Korkokaavat

yksinkertainen korkolasku:

$$K_t = (1 + it)K_0 = (1 + \frac{p}{100}t)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

koronkorkolasku:

$$K_t = (1+i)^t K_0, \text{ kun } t = 1, 2, 3, \ldots$$

jatkuva korkolasku:

$$K_t = (1+i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1+i) = e^{\rho}$$

Summakaavat:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Vaasan yliopisto
UNIVERSITY OF VAASA

kevät 2017

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

Opettaja: Matti Laaksonen

B

1. välikoe torstaina 16.2.2017

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava). Kun teet tehtävän, niin käsittele kaikki sen alakohdat.

B1. (a) Laske 2,17% todelliseen vuosikorkoon liittyvä kuukausikorkokanta.
(b) Mikä on todellinen vuosikorko, kun kuukausikorkokanta on 0.0026930832?
(c) Laske tasaerälainan annuiteetti, kun lainan määrä on 1 000€, laina-aika on 18 kuukautta, laina hoidetaan kuukausierinä, ja lainaan liittyvä todellinen vuosikorko on 3,15%.

B2. Yritys valmistaa eräällä tuotantolinjallaan q tuotetta kuukaudessa. Valmistettavan tuotteen kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.030q$ ja vastaava kustannusfunktio on $C(q) = 0.02q^2 + 5q + 100$. Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen? Mikä on maksimivoitto.

B3. Yrittäjä ostaa koneen ja aloittaa uuden tuotantolinjan. Koneen ostohinta on 30 000€. Koneen asentaminen ja koekäyttö kestää kaksi kuukautta ja sitoo kaksi työntekijää, joiden palkkameno asennusjaksolta on 2000€/kk/hlö. Asennusjakson jälkeen alkaa tuotanto, joka tuottaa yrittäjälle nettotuloa 700€/kk. Mikä on projektin nykyarvo, kun laskentakorkona on 5,00%(todellinen vuosikorko)? *Projektin koko kesto on 6 vuotta (70kk nettotuloa).*

B4. (a) (1p) Selitä lyhyesti sanallisesti, mitä tarkoittaa ja miten lasketaan y:n jousto x:n suhteen. Voit antaa lausekkeenkin, mutta tärkeämpää on nyt antaa sanallinen kuvaus asiasta.
b) (3p) Erään tuotteen kysynnän hintajousto on -2.15. Tuotteen hinta on nyt 13,50€/kpl ja sen kysyntä on 1 000 kpl/kk. Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen hintaa nostetaan 0.50 eurolla?
c) (2p) Miten b-kohdassa kuvattu hinnan muutos muuttaa myynnistä saatavaa tuottoa? Voiko b-kohdassa annettujen tietojen perusteella ratkaista, oliko hinnan muutos kannattava? Miten?

Kaavoja:

Kysynnän hintajousto:

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} \quad = \quad \text{jousto}, \qquad MR = p\left(1 + \frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}}\right)$$

Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(f(x_1) - f(x_0))$$

Jaksolliset suoritukset

$$\begin{aligned}
\text{prolongointitekijä } s_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\
\text{diskonttaustekijä } a_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \\
\text{kuoletuskerroin } c_{n,i} &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}
\end{aligned}$$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\text{annuiteetti } k = c_{n,i}K_0, \qquad \text{osamaksuerä } k = c_{n,i}(H - h + m)$$

Derivaatta ja 2. asteen yhtälö

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(ax^n) &= nax^{n-1} \\
ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Korkokaavat

yksinkertainen korkolasku:

$$K_t = (1 + it)K_0 = (1 + \frac{p}{100}t)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

koronkorkolasku:

$$K_t = (1+i)^t K_0, \text{ kun } t = 1,2,3,\ldots$$

jatkuva korkolasku:

$$K_t = (1+i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1+i) = e^{\rho}$$

Summakaavat:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Vaasan yliopisto
UNIVERSITY OF VAASA

kevät 2017

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030
Opettaja: Matti Laaksonen

C

1. välikoe torstaina 16.2.2017
Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava). Kun teet tehtävän, niin käsittele kaikki sen alakohdat.

C1. (a) Laske 4,05% todelliseen vuosikorkoon liittyvä kuukausikorkokanta.
(b) Mikä on todellinen vuosikorko, kun kuukausikorkokanta on 0.0031369734?
(c) Laske tasaerälainan annuiteetti, kun lainan määrä on 2 400 €, laina-aika on 9 kuukautta, laina hoidetaan kuukausierinä, ja lainaan liittyvä todellinen vuosikorko on 2,15%.

C2. Yritys valmistaa eräällä tuotantolinjallaan q tuotetta kuukaudessa. Valmistettavan tuotteen kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.030q$ ja vastaava kustannusfunktio on $C(q) = 0.02q^2 + 5q + 100$. Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen? Mikä on maksimivoitto.

C3. Yrittäjä ostaa koneen ja aloittaa uuden tuotantolinjan. Koneen ostohinta on 20 000 €. Koneen asentaminen ja koekäyttö kestää kaksi kuukautta ja sitoo kaksi työntekijää, joiden palkkameno asennusjaksolta on 2000€/kk/hlö. Asennusjakson jälkeen alkaa tuotanto, joka tuottaa yrittäjälle nettotuloa 500 €/kk. Mikä on projektin nykyarvo, kun laskentakorkona on 4,00%(todellinen vuosikorko)? *Projektin koko kesto on 6 vuotta (70kk nettotuloa).*

C4. (a) (1p) Selitä lyhyesti sanallisesti, mitä tarkoittaa ja miten lasketaan y:n jousto x:n suhteen. Voit antaa lausekkeenkin, mutta tärkeämpää on nyt antaa sanallinen kuvaus asiasta.
b) (3p) Erään tuotteen kysynnän hintajousto on -1.45. Tuotteen hinta on nyt 15,50 €/kpl ja sen kysyntä on 1 500 kpl/kk. Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen hintaa lasketaan 1.50 eurolla?
c) (2p) Miten b-kohdassa kuvattu hinnan muutos muuttaa myynnistä saatavaa tuottoa? Voiko b-kohdassa annettujen tietojen perusteella ratkaista, oliko hinnan muutos kannattava? Miten?

Kaavoja:

Kysynnän hintajousto:

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \text{jousto}, \qquad MR = p\left(1 + \frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}}\right)$$

Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(f(x_1) - f(x_0))$$

Jaksolliset suoritukset

$$\begin{aligned} \text{prolongointitekijä } s_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ \text{diskonttaustekijä } a_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \\ \text{kuoletuskerroin } c_{n,i} &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \end{aligned}$$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\text{annuiteetti } k = c_{n,i}K_0, \qquad \text{osamaksuerä } k = c_{n,i}(H - h + m)$$

Derivaatta ja 2. asteen yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(ax^n) &= nax^{n-1} \\ ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Korkokaavat

yksinkertainen korkolasku:

$$K_t = (1 + it)K_0 = (1 + \frac{p}{100}t)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

koronkorkolasku:

$$K_t = (1+i)^t K_0, \text{ kun } t = 1, 2, 3, \ldots$$

jatkuva korkolasku:

$$K_t = (1+i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1+i) = e^{\rho}$$

Summakaavat:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Vaasan yliopisto
UNIVERSITY OF VAASA

kevät 2017

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

Opettaja: Matti Laaksonen

D

D1. välikoe torstaina 16.2.2017

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava). Kun teet tehtävän, niin käsittele kaikki sen alakohdat.

D1. (a) Laske 5,35% todelliseen vuosikorkoon liittyvä kuukausikorkokanta.
(b) Mikä on todellinen vuosikorko, kun kuukausikorkokanta on 0.0034103014?
(c) Laske tasaerälainan annuiteetti, kun lainan määrä on 1 800€, laina-aika on 16 kuukautta, laina hoidetaan kuukausierinä, ja lainaan liittyvä todellinen vuosikorko on 5,15%.

D2. Yritys valmistaa eräällä tuotantolinjallaan q tuotetta kuukaudessa. Valmistettavan tuotteen kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.030q$ ja vastaava kustannusfunktio on
$C(q) = 0.02q^2 + 5q + 100$. Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen? Mikä on maksimivoitto.

D3. Yrittäjä ostaa koneen ja aloittaa uuden tuotantolinjan. Koneen ostohinta on 23 000€. Koneen asentaminen ja koekäyttö kestää kaksi kuukautta ja sitoo kaksi työntekijää, joiden palkkameno asennusjaksolta on 2000€/kk/hlö. Asennusjakson jälkeen alkaa tuotanto, joka tuottaa yrittäjälle nettotuloa 600€/kk. Mikä on projektin nykyarvo, kun laskentakorkona on 6,00%(todellinen vuosikorko)? *Projektin koko kesto on 6 vuotta (70kk nettotuloa).*

D4. (a) (1p) Selitä lyhyesti sanallisesti, mitä tarkoittaa ja miten lasketaan y:n jousto x:n suhteen. Voit antaa lausekkeenkin, mutta tärkeämpää on nyt antaa sanallinen kuvaus asiasta.
b) (3p) Erään tuotteen kysynnän hintajousto on -1.80. Tuotteen hinta on nyt 13,50€/kpl ja sen kysyntä on 1 100 kpl/kk. Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen hintaa lasketaan 1.50 eurolla?
c) (2p) Miten b-kohdassa kuvattu hinnan muutos muuttaa myynnistä saatavaa tuottoa? Voiko b-kohdassa annettujen tietojen perusteella ratkaista, oliko hinnan muutos kannattava? Miten?

Kaavoja:

Kysynnän hintajousto:

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \text{jousto}, \qquad MR = p\left(1 + \frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}}\right)$$

Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(f(x_1) - f(x_0))$$

Jaksolliset suoritukset

$$\begin{aligned} \text{prolongointitekijä } s_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ \text{diskonttaustekijä } a_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \\ \text{kuoletuskerroin } c_{n,i} &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \end{aligned}$$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\text{annuiteetti } k = c_{n,i}K_0, \qquad \text{osamaksuerä } k = c_{n,i}(H - h + m)$$

Derivaatta ja 2. asteen yhtälö

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Korkokaavat

yksinkertainen korkolasku:

$$K_t = (1 + it)K_0 = (1 + \frac{p}{100}t)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

koronkorkolasku:

$$K_t = (1+i)^t K_0, \text{ kun } t = 1, 2, 3, \ldots$$

jatkuva korkolasku:

$$K_t = (1+i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1+i) = e^{\rho}$$

Summakaavat:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$