Vaasan yliopisto, kevät 2018

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

7. harjoitus, viikko 9 (26.2.–2.3.2018)

R1	ma	12–14	F453	R5	ti	14–16	F453
R2	ma	14–16	F453	R6	to	12–14	F425
R3	ti	08–10	F425	R7	pe	08–10	F453
R4	ti	12–14	F453	R8	pe	10–12	F453

1. Laske integraalit

$$\text{a)} \quad \int (4x+6x^2)\mathrm{d}x \qquad \text{b)} \quad \int_2^3 (1+6x)\mathrm{d}x.$$

2. Muuttuja x saa arvoja väliltä $0 \le x \le 2$ niin, että todennäköisyystiheys on $\phi(x) = 0{,}75 \cdot (2x - x^2)$. Funktion kerroin valitaan niin, että $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx = 1$.

a) Tarkista, että kerroin on oikein asetettu. Ts. laske integraali $\int_0^2 \phi(x)\,dx$

b) Laske muuttujan x odotusarvo $\quad \mathrm{E}[x] = \int_0^2 x \cdot \phi(x)\,dx.$

c) Millä todennäköisyydellä $x \ge 1.2$. Ts. Laske $\quad P[x \ge 1.2] = \int_{1.2}^2 \phi(x)\,dx$

3. Vakiokassavirta $k = 280€/\text{kk}$ alkaa 10 päivän kuluttua ja kestää 40 päivää ($t_1 = 10$ ja $t_2 = 50$). Viikonloput eivät katkaise kassavirtaa, ja voimme soveltaa sakasalaista laskutapaa (1 kk = 30 päivää). Laske hetkeen $t_0 = 0$ laskettu nykyarvo, kun laskentakorko on 3.25% (p.a.).

3. Investointiprojektin perusinvestointi on 8 250€ja kuukausittainen nettotulovirta alkaa heti investoinnin jälkeen ja kestää 5 vuotta. Miten suuri tulee kuukausittaisen nettotulovirran olla (x€/kk) jotta investoinnin nettonykyarvo olisi positiivinen, kun laskentakorko on 8% (todellinen vuosikorko).

4. Verrataan kahta projektia. Projektin A perusinvestointi on 2 000€ ja se tuottaa kahden vuoden ajan 100€/kk. Projektin B perusinvestointi on 16 000€ja se tuottaa kymmenen vuoden ajan 200€/kk. Kassavirroissa on huomioitu vain liiketoiminnan tuotot ja kustannukset. Rahoitusmenoja ei ole vielä laskettu mukaan.
a) Laske projektien nettonykyarvot, kun laskentakorko on 8% (todellinen vuosikorko). Ovatko projektit kannattavia?
b) Laske tehtävän projekteille A ja B suhteelliset nettonykyarvot. Kumpi projekteista on kannattavampi?

5. a) Laske Excelin IRR-funktion avulla tehtävän 4 projekteille sisäiset korkokannat (per annum). Kumpi nyt tuntuu kannattavammalta?

b) Laske pääoman tuottoasteet $\mathrm{ROI_{II}}$ tehtävän 4 projekteille. (Tulokset eivät välttämättä ole järkeviä, sillä ROI on hyvä kannattavuuden mittari vain pitkälle projektille.) Kumpi nyt tuntuu kannattavammalta?

6. Tarkista derivoimalla kaavat

$$\int e^{-\rho x} dx = \frac{-1}{\rho} e^{-\rho x}$$

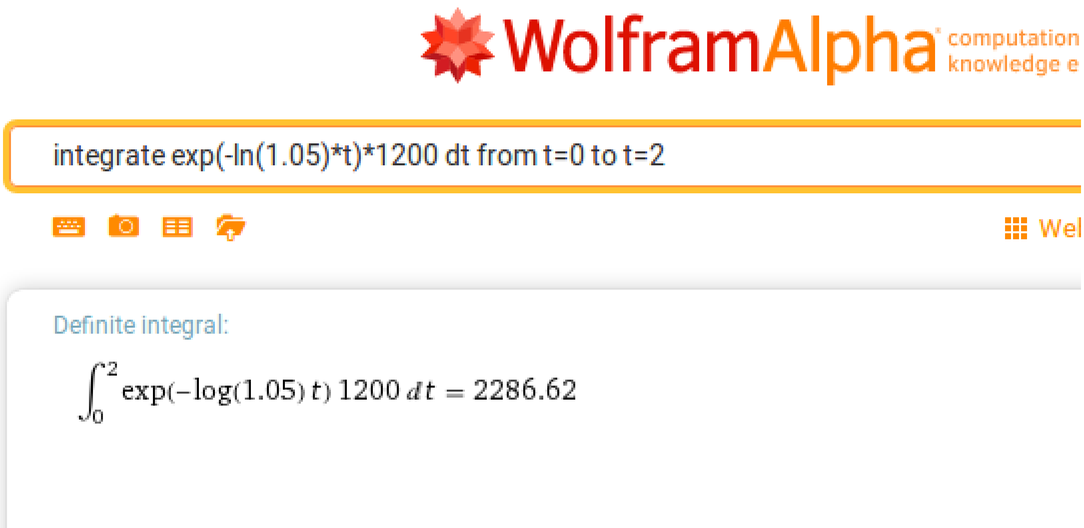
$$\int x \cdot e^{-\rho x} dx = \left(\frac{-x}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) e^{-\rho x}$$

7. Tarkastellaan kahta kassavirtaa $c_1(t)$ ja $c_2(t)$. Kumpikin kassavirta kestää 2 vuotta. Ensimmäinen kassavirta on vakiotulovirta $100e/\text{kk}$. Toisen kassavirran voimakkuus pienenee tasaisesti. Alussa kassavirta on $150e/\text{kk}$ ja lopussa $50e/\text{kk}$. Laskentakorkokanta on 5% / p.a. ($\rho = \ln 1.05 \frac{1}{\text{vuosi}}$). Laske nykyarvot

$$NA_1 = \int_0^2 e^{-\rho t} 1200 \frac{e}{\text{vuosi}} dt$$

$$NA_2 = \int_0^2 e^{-\rho t} (1800 - 600 \cdot t) \frac{e}{\text{vuosi}} dt$$

Vihje: voit tarkistaa tuloksen Wolfram Alpha:lla



Kaavoja:

$$\begin{aligned}
\text{yksinkertainen korkolasku:} \quad K_t &= (1+it)K_0 = (1+\frac{p}{100}t)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1 \\
\text{koronkorkolasku:} \quad K_t &= (1+i)^t K_0, \text{ kun } t = 1,2,3,\ldots \\
\text{jatkuva korkolasku:} \quad K_t &= (1+i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1+i) = e^{\rho}
\end{aligned}$$

Jaksolliset suoritukset

$$\begin{aligned}
\text{prolongointitekijä } s_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\
\text{diskonttaustekijä } a_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \\
\text{kuoletuskerroin } c_{n,i} &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}
\end{aligned}$$

Jatkuvan vakiokassavirran nykyarvo

Jos kassavirta k alkaa hetkellä t_1 ja päättyy hetkellä t_2, niin hetkeen t_0 diskontattu nykyarvo on

$$NPV_{t_0} = \int_{t_1}^{t_2} e^{-\rho(t-t_0)} k \,\mathrm{d}t = \frac{k}{\rho}\left(e^{-\rho(t_1-t_0)} - e^{-\rho(t_2-t_0)}\right), \quad \rho = \ln(1+i)$$

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$\int ae^{bx} dx = \frac{a}{b} e^{bx} + C$$