

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

9. harjoitus, viikko 11 (12.3.–16.3.2018)

R1	ma	12–14	F453	R5	ti	14–16	F453
R2	ma	14–16	F453	R6	to	12–14	F425
R3	ti	08–10	F425	R7	pe	08–10	F453
R4	ti	12–14	F453	R8	pe	10–12	F453

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)
a) $A+B$, b) $A+C$, c) $B+C$. (Voit käyttää laskemiseen myös Exeliä. Kurssin verkkosivulla linkki Youtube-ohjeeseen.)

2. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)
a) AB , b) BA , c) AC , d) CA , e) $C^T A$. (Voit käyttää laskemiseen myös Exeliä. Kurssin verkkosivulla linkki Youtube-ohjeeseen.)

3. Määritä rivioperaatioiden avulla käänteismatriisi matriisille

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x - z = 2 \\ 3y + 5z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(Vihje: Voit soveltaa periaatetta $N\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = N^{-1}\vec{b}$. Huomaa, että kerroinmatriisin käänteismatriisi laskettiin edellisessä tehtävässä!)

5. Miten edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu, jos kolmannen yhtälön oikea puoli kasvaa yhdellä (arvosta 8 arvoon 9)?

6. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ -x - y = -3 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{=M} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} \Leftrightarrow M\vec{x} = \vec{b}$$

Tarkista laskemalla, että yhtälöryhmän ratkaisu saadaan kaavalla

$$\vec{x} = (M^T M)^{-1} M^T \vec{b}.$$

(Voit käyttää laskemiseen Exeliä.)

7. Miten edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu, jos toisen yhtälön oikea puoli kasvaa yhdellä (arvosta -3 arvoon -2)?

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

9. harjoitus, viikko 11 (12.3.-16.3.2018)

R1	ma	12-14	F453	R5	ti	14-16	F453
R2	ma	14-16	F453	R6	to	12-14	F425
R3	ti	08-10	F425	R7	pe	08-10	F453
R4	ti	12-14	F453	R8	pe	10-12	F453

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)

a) $A+B$, b) $A+C$, c) $B+C$. (Voit käyttää laskemiseen myös Exeliä. Kurssin verkkosivulla linkki Youtube-ohjeeseen.)

$$a) \quad \begin{matrix} A+B \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 3 \\ ok \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \begin{matrix} A+C \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 2 \\ \downarrow \end{matrix} \quad \text{ei voi laskea}$$

$$c) \quad \begin{matrix} B+C \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 2 \\ \downarrow \end{matrix} \quad \text{ei voi laskea}$$

2. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)

a) AB , b) BA , c) AC , d) CA , e) $C^T A$. (Voit käyttää laskemiseen myös Exeliä. Kurssin verkkosivulla linkki Youtube-ohjeeseen.)

$$a) \quad \begin{matrix} AB \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 3 \\ ok \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -9 \\ -8 & 6 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \begin{matrix} BA \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 3 \\ ok \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad \begin{matrix} AC \\ 3 \times 3 \quad 3 \times 2 \\ ok \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) CA ei voi laskua
 3×2 3×3

$$e) \quad C^T A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 1 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

2×3 3×3
OK

3. Määritä rivioperaatioiden avulla käänteismatriisi matriisille

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(I | I) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow (-1) \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \cdot (-3) \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & -2,5 & 2,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 1,5 & -1,5 & 0,5 \end{array} \right)$$

$$\therefore N^{-1} = \begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 & 0,5 \\ -2,5 & 2,5 & -0,5 \\ 1,5 & -1,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Tarkistus

$$N N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 & 0,5 \\ -2,5 & 2,5 & -0,5 \\ 1,5 & -1,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} N = \begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 & 0,5 \\ -2,5 & 2,5 & -0,5 \\ 1,5 & -1,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x - z = 2 \\ 3y + 5z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(Vihje: Voit soveltaa periaatetta $N\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = N^{-1}\vec{b}$. Huomaa, että kerroinmatriisin käänteismatriisi laskettiin edellisessä tehtävässä!)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = N^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 & 0,5 \\ -2,5 & 2,5 & -0,5 \\ 1,5 & -1,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 - 1 + 4 \\ 0 + 5 - 4 \\ 0 - 3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vastaus $x=3, y=1, z=1$

Tarkistetaan

$$\begin{cases} 3 - 1 - 2 \cdot 1 = 0 & \checkmark \\ 3 - 1 = 2 & \checkmark \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 8 & \checkmark \end{cases}$$

5. Miten edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu, jos kolmannen yhtälön oikea puoli kasvaa yhdellä (arvosta 8 arvoon 9)?

$$\Delta \vec{x} = N^{-1} \Delta \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 & 0,5 \\ -2,5 & 2,5 & -0,5 \\ 1,5 & -1,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Vastaus

Uudet tulokset $\Delta x = 0,5, \Delta y = -0,5, \Delta z = 0,5$

Uudet arvot $x_{uusi} = 3,5, y_{uusi} = 0,5, z_{uusi} = 1,5$

6. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ -x - y = -3 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}_{=M} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} \Leftrightarrow M\vec{x} = \vec{b}$$

Tarkista laskemalla, että yhtälöryhmän ratkaisu saadaan kaavalla

$$\vec{x} = (M^T M)^{-1} M^T \vec{b}.$$

(Voit käyttää laskemiseen Exeliä.)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad M^T M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 13 & 30 \end{pmatrix}$$

$$(M^T M)^{-1} = \frac{1}{6 \cdot 30 - 13 \cdot 13} \begin{pmatrix} 30 & -13 \\ -13 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 30 & -13 \\ -13 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (M^T M)^{-1} M^T &= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 30 & -13 \\ -13 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & -17 & -5 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (M^T M)^{-1} M^T \vec{b} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & -17 & -5 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 44 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vastaus $x = 4, y = -1$

Tarkk.

$$\begin{aligned} 4 + 2 \cdot (-1) &= 2 && \checkmark \\ -4 - (-1) &= -3 && \checkmark \\ 2 \cdot 4 + 5 \cdot (-1) &= 3 && \checkmark \end{aligned}$$

H9t6

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$M^T * M = \begin{bmatrix} 6 & 13 \\ 13 & 30 \end{bmatrix}$$

=MMULT(H3:J4;C2:D4)

$$(M^T * M)^{-1} = \begin{bmatrix} 2,727273 & -1,18182 \\ -1,18182 & 0,545455 \end{bmatrix}$$

=MINVERSE(C6:D7)

$$(M^T * M)^{-1} * M^T = \begin{bmatrix} 0,363636 & -1,54545 & -0,454545 \\ -0,09091 & 0,636364 & 0,3636364 \end{bmatrix} = \text{MMULT}(C9:D10;I3:K4)$$

$$x = (M^T * M)^{-1} * M^T * b =$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

=MMULT(C12:E13;G2:G4)

Tarkistus:

$$Mx = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

=MMULT(C2:D4;C15:C16)

OK

7. Miten edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu, jos toisen yhtälön oikea puoli kasvaa yhdellä (arvosta -3 arvoon -2)?

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & -17 & -5 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17/11 \\ 7/11 \end{pmatrix} \\ \approx \begin{pmatrix} -1,55 \\ 0,64 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{uusi}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -17/11 \\ 7/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/11 \\ -4/11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ -x - y = -2 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases}$$

gissa
→

$$\begin{cases} \frac{27}{11} + 2 \cdot \left(-\frac{4}{11}\right) = \frac{19}{11} \approx 2 \\ -\frac{27}{11} - \left(-\frac{4}{11}\right) = -\frac{23}{11} \approx -2 \\ 2 \cdot \frac{27}{11} + 5 \cdot \left(-\frac{4}{11}\right) = \frac{34}{11} \approx 3 \end{cases}$$

Saatua ratkaisua
ei ole ratkaisu

Se on PNS-approksi-
manti

"melkein ratkaisu"