Vaasan yliopisto
UNIVERSITY OF VAASA

kevät 2019 / orms.1030

# Talousmatematiikan perusteet

**10. harjoitus, viikko 13** (25.03.–29.03.2019)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L | Ma | 10–12 | A202 | R05 | Ti | 14–16 | F453 |
| R01 | Ma | 12–14 | F453 | L | To | 08–10 | A202 |
| R02 | Ma | 16–18 | F453 | R06 | To | 12–14 | F140 |
| R03 | Ti | 08–10 | F425 | R07 | Pe | 08–10 | F453 |
| R04 | Ti | 12–14 | F453 | R08 | Pe | 10–12 | F453 |

**1.** Määritä adjungaatti matriisille

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**2.** Määritä käänteismatriisi edellisessä tehtävän matriisille.
(Ohje: Koska edellisessä tehtävässä laskimme matriisin Adjungaatin, saamme nyt käänteimatriisin helpoimmin kaavalla $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(\boldsymbol{A})} \cdot \mathrm{Adj}(\boldsymbol{A})$.)

**3.** Määritä adjungaatin avulla käänteismatriisi matriisille $\boldsymbol{N}$.

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**4.** Ratkaise Cramerin kaavoilla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 0 \\ 5x + 2y + 4z = 0 \\ -3x + y + z = 10 \end{cases}$$

**5.** Samuelsonin kerroin-kiihdytin -malli kuvaa kansantalouden syklistä dynamiikkaa. Jos malli on stabiili, se johtaa ilman häiriöitä tasapainotilaan, jota kuvaa alla oleva yhtälöryhmä. Ratkaise $x$ yhtälöryhmästä Cramerin kaavalla.

$$\begin{cases} y = x + z \\ x = (1-s)(1-t)y \\ z = I_0 + ty \end{cases},$$

missä

$$\begin{aligned} x &= \text{kulutus tasapainotilassa}, \\ y &= \text{kansantulo tasapainotilassa}, \\ z &= \text{investoinnit tasapainotilassa}, \\ I_0 &= \text{pakolliset investoinnit (oletetaan vakioksi)}, \\ s &= \text{säästämisaste } (0 \le s \le 1, \text{ oletetaan vakioksi}), \\ t &= \text{veroaste } (0 \le t \le 1, \text{ oletetaan vakioksi}) \end{aligned}$$

**6.** Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} -x & + & 2y & = & 2 \\ & & -y & = & -3 \\ -2x & + & 4y & = & 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{M}\vec{x} = \vec{b}$$

Tarkista laskemalla, että yhtälöryhmän ratkaisu saadaan kaavalla

$$\vec{x} = (\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{M}^T\vec{b}.$$

(Voit käyttää laskemiseen Exeliä.)

**7.** Miten edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu, jos kolmannen yhtälön oikea puoli kasvaa yhdellä (arvosta 4 arvoon 5)?

**8.** Sovita malli

$$c_0 + c_1 \cdot u_t + c_2 \cdot v_t = \hat{y}_t \approx y_t$$

dataan

| $k$ | $u_t$ | $v_t$ | $y_t$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.1 | 2.1 | 3.5 |
| 2 | 2.0 | 1.8 | 3.2 |
| 3 | 1.5 | 2.0 | 2.8 |
| 4 | 1.8 | 1.5 | 3.4 |
| 5 | 1.2 | 1.1 | 3.6 |

Ohje: Määritä paras mahdollinen ratkaisu (PNS-ratkaisu) yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} c_0 \cdot 1 & + & c_1 \cdot 1.1 & + & c_2 \cdot 2.1 & = & 3.5 \\ c_0 \cdot 1 & + & c_1 \cdot 2.0 & + & c_2 \cdot 1.8 & = & 3.2 \\ c_0 \cdot 1 & + & c_1 \cdot 1.5 & + & c_2 \cdot 2.0 & = & 2.8 \\ c_0 \cdot 1 & + & c_1 \cdot 1.8 & + & c_2 \cdot 1.5 & = & 3.4 \\ c_0 \cdot 1 & + & c_1 \cdot 1.2 & + & c_2 \cdot 1.1 & = & 3.6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1.1 & 2.1 \\ 1 & 2.0 & 1.8 \\ 1 & 1.5 & 2.0 \\ 1 & 1.8 & 1.5 \\ 1 & 1.2 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 3.2 \\ 2.8 \\ 3.4 \\ 3.6 \end{pmatrix}$$

**Kaavoja:**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} ax^n = n \cdot ax^{n-1}, \qquad \int bx^m dx = \frac{b}{m+1} x^{m+1}, \text{ kun } m \neq -1$$

**Interpolointi:**

$$f(x) \approx f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

**Varastomallit:**

perusmalli $q_0 = \sqrt{\dfrac{2KD}{h}}$

puutemalli $q_1 = q_0\sqrt{\dfrac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0\sqrt{\dfrac{s}{h+s}}, \quad TC_1(q) = \dfrac{KD}{q} + \dfrac{M^2h}{2q} + \dfrac{(q-M)^2s}{2q}$

**Korkolasku:**

| | | |
|---|---|---|
| yksinkertainen korkolasku: | $K_t = (1+it)K_0 = (1+\frac{p}{100}t)K_0,$ | kun $0 < t < 1$ |
| koronkorkolasku: | $K_t = (1+i)^tK_0,$ | kun $t = 1,2,3,\dots$ |
| jatkuva korkolasku: | $K_t = (1+i)^tK_0 = e^{\rho t}K_0,$ | kun $t > 1$ ja $(1+i) = e^{\rho}$ |

**Jaksolliset suoritukset**

prolongointitekijä $s_{n,i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$, diskonttaustekijä $a_{n,i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$, kuoletuskerroin $c_{n,i} = \dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$.

**Tasaerälaina ja osamaksukauppa**

annuiteetti: $k = c_{n,i}K_0$ osamaksuerä: $k = c_{n,i}(H-h+m)$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1+(k-1)d) = n\cdot\frac{(a_1+a_n)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_1q^{k-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

**Nykyarvo:**

Jaksotetulle vakiotulovirralle ($H$ on perusinvestointi, $JA$ on jäännösarvo ja $k$ on tulovirta):

$$NNA = -H + a_{n,i}\cdot k + \frac{JA}{(1+i)^n}.$$

**Matriisikaavoja ($n\times n$) neliömatriisille $\boldsymbol{A}$, jonka alkiot ovat $a_{ij}$.**

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}m_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}m_{kj},$$

missä $m_{ij}$ on alkioon $a_{ij}$ liittyvä minori.

$$\operatorname{adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} & \cdots \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} & \cdots \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$$

Cramerin kaavat: $x_j = D_j/D$

jos $\mathrm{Det}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) \neq 0$, niin $\boldsymbol{A}^{\dagger} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T$

**Indeksikaavoja**

Laspeyres $P^L_{t_0;t} = \dfrac{\sum_i p_{t;i}q_{t_0;i}}{\sum_i p_{t_0;i}q_{t_0;i}}\cdot 100, \qquad Q^L_{t_0;t} = \dfrac{\sum_i q_{t;i}p_{t_0;i}}{\sum_i q_{t_0;i}p_{t_0;i}}\cdot 100$

Paaschen $P^P_{t_0;t} = \dfrac{\sum_i p_{t;i}q_{t;i}}{\sum_i p_{t_0;i}q_{t;i}}\cdot 100, \qquad Q^P_{t_0;t} = \dfrac{\sum_i q_{t;i}p_{t;i}}{\sum_i q_{t_0;i}p_{t;i}}\cdot 100$

Fisher $P^F_{t_0;t} = \sqrt{P^L_{t_0;t}\cdot P^P_{t_0;t}}, \qquad Q^P_{t_0;t} = \sqrt{Q^L_{t_0;t}\cdot Q^P_{t_0;t}}$