kevät 2019 / orms.1030

Talousmatematiikan perusteet

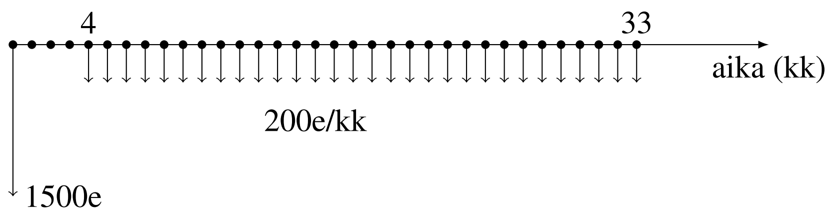
5. harjoitus, viikko 7 (11.02.–15.02.2019)

R01	Ma	12–14	F453	R08	Ke	10–12	F453
R02	Ma	16–18	F453	L	To	08–10	A202
R03	Ti	08–10	F425	R06	To	12–14	F140
R04	Ti	12–14	F453	R07	Pe	08–10	F453
R05	Ti	14–16	F453	L	Pe	10–12	A202

1. välikoe perjantaina 15.2. klo 10-12 salissa A202

1. a) Yritys solmii sopimuksen, jonka mukaan yritys maksaa sopimuksen allekirjoituspäivänä 1500€ ja lisäksi kuukausittain maksetaan 200€ niin, että kuukausimaksut alkavat 3 kuukautta allekirjoittamisen jälkeen (eli ensimmäinen 200€ maksu maksetaan 4 kuukautta sopimuksen solmimisesta) ja kuukausieriä maksetaan 30 (2,5 vuotta). Laske maksuvirran nykyarvo, kun laskentakorko (todellinen vuosikorko) on 3.15%.
b) Tarkista tulos Excelin NPV-funktiolla.

Ratkaisu:
a)



$$\begin{aligned}
\text{Nykyarvo} &= 1500€ + \sum_{k=4}^{33} \frac{200€}{(1.0315^{1/12})^k} \\
&= 1500€ + \frac{200€}{1.0315^{4/12}} \left(\frac{1-(1.0315^{-1/12})^{30}}{1-1.0315^{-1/12}} \right) \qquad = 1500€ + 5721.30€ \\
&= 7221.30€
\end{aligned}$$

(Tarkistus: Kirjanpidollinen maksukertymä on $1500€ + 30 \cdot 200€ = 7\,500€$ Nykyarvo on nyt hieman vähemmän kuin kirjanpidollinen kertyma, kuten sen pitää ollakin. OK)

Vastaus: Maksuvirran nykyarvo on 7 221.30€.

b) Rakennetaan maksuvirta Excel-tauluun

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		k						
3		0	1500		1+i_tod =	1,0315		
4		1	0		1+i_kk =	1,002587847	'=F3^(1/12)	
5		2	0		i_kk =	0,002587847	'=F4-1	
6		3	0					
7		4	200		NPV =	7 221,30 €	'=C3+NPV(F5;C4:C36)	
8		5	200					
9		6	200					
10		7	200					
11		8	200					
12		9	200					
13		10	200					
14		11	200					
15		12	200					
16		13	200					
17		14	200					
18		15	200					
19		16	200					
20		17	200					
21		18	200					
22		19	200					
23		20	200					
24		21	200					
25		22	200					
26		23	200					
27		24	200					
28		25	200					
29		26	200					
30		27	200					
31		28	200					
32		29	200					
33		30	200					
34		31	200					
35		32	200					
36		33	200					
37								

2. Verrataan kahta projektia. Projektin A perusinvestointi on 2 000€ ja se tuottaa kahden vuoden ajan 100€/kk. Projektin B perusinvestointi on 15 500€ja se tuottaa kymmenen vuoden ajan 200€/kk. Ovatko projektit kannattavia, kun laskentakorko on 8% (todellinen vuosikorko)?

Ratkaisu: Siirrytään kuukausijaksotukseen. Sitä varten laskemme kuukausikorkotekijän.

$$1 + i_{tod} = 1.08 \qquad \Rightarrow 1 + i = 1.08^{1/12}$$

Lasketaan kummankin projektin nettonykyarvo. Jos nettonykyarvot ovat positiivisia käytetyllä laskentakorolla, niin projektit ovat kannattavia.

$$
\begin{aligned}
NPV_A &= -2\,000€ + \sum_{j=1}^{24} \frac{100€}{(1+i)^j} \\
&= -2000€ + \sum_{j=1}^{24} \frac{100€}{1.08^{j/12}} \\
&= -2\,000€ + \frac{100€}{1.08^{1/12}} \cdot \left(\frac{1-(1.08^{-1/12})^{24}}{1-1.08^{-1/12}} \right) \\
&= -2\,000€ + 2\,217.29€ = 217.29€ \qquad\qquad (> 0, \text{ kannattava})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
NPV_B &= -15\,500€ + \sum_{j=1}^{120} \frac{200€}{(1+i)^j} \\
&= -15\,500€ + \sum_{j=1}^{120} \frac{200€}{1.08^{j/12}} \\
&= -15\,500€ + \frac{200€}{1.08^{1/12}} \cdot \left(\frac{1-(1.08^{-1/12})^{120}}{1-1.08^{-1/12}} \right) \\
&= 15\,500€ + 16\,686.48€ = 1\,186.48€ \qquad\qquad (> 0, \text{ kannattava})
\end{aligned}
$$

Vastaus: Nettonykyarvon perusteella kumpikin projekti on kannattava käytetyllä laskentakorolla.
(Huomautus: Projektien keskinäistä paremmuutta mietittäessä on oltava varovainen. Siitä, että $NPV_B > NPV_A$ ei seuraa, että B olisi projektina parempi. Itse asiassa A tuottaa perusinvestointiin suhteutettuna enemmän ja nopeammin kuin B. Vaikka kassavirrat ovat tärkeä asia, projektien käynnistämisessä on muitakin tärkeitä asioita. Joskus kannattaa aloittaa huonompikin projekti, jos sillä varmistetaan yrityksen markkina-asema.)

3. Laske edellisen tehtävän projekteille nettonykyarvot ja suhteelliset nettonykyarvot. Kumpi projekteista on kannattavampi?

Ratkaisu:
Nettonykyarvot laskettiin edellä ja tulosten perusteella näyttää siltä kuin B olisi parempi kuin A

$$NPV_B = 1\,186.48€ \qquad > \qquad NPV_A = 217.29€$$

Lasketaan seuraavaksi suhteelliset nykyarvot (SNA = tulovirran NA / menovirran NA). Tarvittavat nykyarvot laskettiin jo edellisessä laskussa. Siis

$$SNA_A = \frac{\text{tulovirran NA}}{\text{menovirran NA}} = \frac{2\,217.29€}{2\,000€} = 1.109$$

$$SNA_B = \frac{\text{tulovirran NA}}{\text{menovirran NA}} = \frac{16\,686.48€}{15\,500€} = 1.077$$

Vastaus: A-projekti on kannattavampi. Vaikka Nykyarvo näyttäisi todistavan vastakkaista. A- ja B-projekti ovat eri kokoisia, jolloin niitä ei saa vertailla nykyarvolla, joka suosii isoa. Suhteellinen nykyarvo on nyt parempi mittari, vaikka silläkin on omat puutteensa.

Huomautus: Jos A-projekti voidaan toteuttaa viisi kertaa peräkkäin, niin silloin on mahdollista saada aikaan tulovirta, jonka nykyarvo on

$$\sum_{j=1}^{120} \frac{100€}{1.08^{j/12}} = \frac{100€}{1.08^{1/12}} \cdot \left(\frac{1-(1.08^{-1/12})^{24}}{1-1.08^{-1/12}} \right) = 8\,343.24€$$

Jos nyt vertaamme kahta kymmenen vuoden projektia ”ketjutettu A” ja B, niin

projekti	sidottu pääoma	tuotto (NA)
ketjutettu A	2000€	8 343.24€
B	15 500€	16 686.48€

A antaa selvästi paremman tuoton sidotulle pääomalle.

4. a) Laske pääoman tuottoasteet (ROI) edellisten tehtävien projekteille A ja B.
b) arvioi projektien A ja B sisäisiä korkokantoja. Jos käytössäsi on Excel-ohjelma, niin laske sisäiset korkokannat IRR-funktiolla.

Ratkaisu:
Pääoman tuottoaste on tilinpäätösanalyyseissä käytetty tunnusluku, joka ei sellaisenaan aina sovi projektien arviointiin.

$$ROI_I = \frac{\text{netto-vuositulos}}{\text{keskimäärin sidottu pääoma}} \cdot 100\%,$$

eli tässä tapauksessa

$$ROI_{I,A} = \frac{12 \cdot 100€}{2\,000€/2} = 120\%$$
$$ROI_{I,B} = \frac{12 \cdot 200€}{15\,500€/2} = 31.3\%$$

Luvut tuntuvat kovin isoilta. Kohtuullisempia tuloksia saadaan, kun lasketaan ROI_{II}

$$ROI_{II} = \frac{\text{netto-vuositulos}}{\text{alussa sidottu pääoma}} \cdot 100\%,$$

eli tässä tapauksessa

$$ROI_{II,A} = \frac{12 \cdot 100€}{2\,000€} = 60\%$$
$$ROI_{II,B} = \frac{12 \cdot 200€}{15\,500€} = 15.5\%$$

Lasketaan vielä kolmas ROI-muunnelma, jossa nettotuloksesta vähennetään pääoman palautukset

$$ROI_I^* = \frac{\text{(nettovuositulos) - (pääoman palautukset)}}{\text{keskimäärin sidottu pääoma}} \cdot 100\%,$$

eli tässä tapauksessa

$$ROI^*_{I,A} = \frac{12 \cdot (100 - 2000/24)€}{2\,000€/2} = 20.0\%$$
$$ROI^*_{I,B} = \frac{12 \cdot (200 - 15\,500/120)€}{15\,500€/2} = 11.0\%$$

b) Koska Nettonykyarvot 8%:n laskentakorolla olivat positiivisia, on kummankin projektin sisäinen korkokanta enemmän kuin 8%. ROI liioittelee aina projektin sisäistä korkokantaa, siksi projektien sisäiset korkokannat ovat pienempiä, kuin edellä lasketut ROI_I ja ROI_{II}. Excel antaa sisäisiksi korkokannoiksi (ks Excel taulu alla)

$$irr_A = 19.75\%, \qquad irr_B = 9.85\%.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2			A	B		A		
3		0	-2000	-15500	IRR_kk =	1,51 %	'=IRR(C3:C27)	
4		1	100	200	IRR_vuosi =	19,75 %	'=(1+F3)^12-1	
5		2	100	200				
6		3	100	200		B		
7		4	100	200	IRR_kk =	0,79 %	'=IRR(D3:D123; 0,01)	
8		5	100	200	IRR_vuosi =	9,85 %	'=(1+F7)^12-1	
9		6	100	200				
10		7	100	200				
11		8	100	200				
12		9	100	200				

Huomaa, että excel tauluun on talletettu kuukausi-dataa. Siksi IRR-funktio antaa kuukausijakson sisäisen koron. Tämä tulee ensin muuttaa vuosijakson sisäiseksi koroksi.

Vastaus: a) $ROI_{II,A} = 60\%$, $ROI_{II,B} = 15.5\%$ b) Excelillä $irr_A = 19.8\%$ ja $irr_B = 9.9\%$.

5. Vertailtavana on kaksi projektia C ja D. Projektin C perusinvestointi on 32 000€ ja se tuottaa kolmen vuoden ajan 1050€/kk. Jäännösarvo on $JA = 5000€$. Projektin D arvioitu nettokassavirta on seuraavan taulukon mukainen ($JA = 2000€$). a) Laske projektien NettoNykyarvot. (Laskentakorko 8% p.a.(tod.vk.)) b) Selvitä projektien sisäiset korkokannat. Kumpi projekti on kannattavampi?

n	k_n	huom.
0	-12 000	perusinvestointi
1	-4 000	
2	-1 500	
3	+500	
4–20	+1 000	
21	+3000	sisältää JA:n

Ratkaisu:
a) Lasketaan projektien nettonykyarvot

$$
\begin{aligned}
NNA_C &= -32\,000€ + \sum_{j=1}^{36} \frac{1\,050€}{(1+i)^j} + \frac{5\,000€}{(1+i)^{36}} \\
&= -32\,000€ + \frac{1\,050€}{1.08^{1/12}} \left(\frac{1-(1.08^{-1/12})^{36}}{1-1.08^{-1/12}} \right) + \frac{5\,000€}{1.08^{36/12}} \\
&= -32\,000€ + 33\,645.50€ + 3\,969.16€ \\
&= 5\,614.66€
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
NNA_D &= -12\,000€ + \frac{-4\,000€}{(1+i)} + \frac{-1\,500€}{(1+i)^2} + \frac{500€}{(1+i)^3} + \sum_{j=4}^{20} \frac{1\,000€}{(1+i)^j} + \frac{3\,000€}{(1+i)^{21}} \\
&= -12\,000€ + \frac{-4\,000€}{1.08^{1/12}} + \frac{-1\,500€}{1.08^{2/12}} + \frac{500€}{1.08^{3/12}} + \frac{1\,000€}{1.08^{4/12}} \left(\frac{1-(1.08^{-1/12})^{17}}{1-1.08^{-1/12}} \right) + \frac{3\,000€}{1.08^{21/12}} \\
&= -12\,000€ - 3\,974.43€ - 1\,480.88€ + 490.47€ + 15\,748.51€ + 2\,621.98€ \\
&= 1\,405.65€
\end{aligned}
$$

b) Excelin antamat sisäiset korkokannat ovat

$$
irr_C = 19.5\%, \qquad irr_D = 16.4\%.
$$

(Excel taulukko alla.)

Vastaus: a) Projektien nettonykyarvot ovat $NPV_C = 5\,614.66€$ ja $NPV_D = 1\,405.65€$
b) Projektien sisäiset korkokannat ovat $irr_C = 19.5\%$ ja $irr_D = 16.4\%$. Tällä kertaa isompi on parempi, eli projekti C on parempi kuin projekti D.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3	i_tod =	0,08				C		
4	i_kk =	0,00643403				IRR_kk =	1,49 %	'=IRR(C8:C44)
5			C	D		IRR_vuosi =	19,49 %	'=(1+G4)^12-1
6		NPV =	5 614,66 €	1 405,65 €				
7						D		
8		0	-32000	-12000		IRR_kk =	1,27 %	'=IRR(D8:D29)
9		1	1050	-4000		IRR_vuosi =	16,41 %	'=(1+G8)^12-1
10		2	1050	-1500				
11		3	1050	500				
12		4	1050	1000				
13		5	1050	1000				
14		6	1050	1000				
15		7	1050	1000				
16		8	1050	1000				
17		9	1050	1000				
18		10	1050	1000				
19		11	1050	1000				
20		12	1050	1000				
21		13	1050	1000				
22		14	1050	1000				
23		15	1050	1000				
24		16	1050	1000				
25		17	1050	1000				
26		18	1050	1000				
27		19	1050	1000				
28		20	1050	1000				
29		21	1050	3000				
30		22	1050					
31		23	1050					
32		24	1050					
33		25	1050					
34		26	1050					
35		27	1050					
36		28	1050					
37		29	1050					
38		30	1050					
39		31	1050					
40		32	1050					
41		33	1050					
42		34	1050					
43		35	1050					
44		36	6050					

6. Selvitä takaisinmaksuaika edellisen tehtävän projekteille C ja D (Laskentakorko 8% p.a.(tod.vk.))
(Huomaa, että alla olevaa takaisinmaksuajan kaavaa on helppo soveltaa projektiin C, mutta projektin D kohdalla tulee kaavaan suhtautua kriittisesti. D-projektin takaisinmaksuajan saa

parhainten Excelillä.)

Ratkaisu: Lasketaan ensin projektin C takaisinmaksuaika. Projektin C rahoitustarve on

$$B = H - \frac{JA}{(1+i)^n} = 32\,000€ - \frac{5\,000€}{1,08^{36/12}} = 28\,030.84€$$

Sijoitetaan tämä takaisinmaksuajan kaavaan

$$n^* = \frac{\ln(k/(k-iB))}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{1050€}{1050€-(1,08^{1/12}-1)28\,030.84€}\right)}{\ln(1.08^{1/12})} = 29.4 \quad \text{(kk)}$$

Projektin D kassavirta ei ole vakio, joten kaavan soveltaminen ei ole helppoa. Koko projektin nettonykyarvo laskettiin edellä, ja se on positiivinen, joten projekti maksaa itsensä takaisin. Silloin takaisinmaksuaika on enintään 21kk.
D-projektin takaisinmaksuaika on siin lyhyempi kuin projektilla C.
Alla olevaan Excel tauluun on rakennettu D-projektin kassavirta. Perusinvestoinnin paikalla on rahoitustarve

$$B = 12\,000€ - \frac{2\,000€}{1.08^{21/12}} = 10\,252.01€$$

Sarakkeeseen E on merkitty k ensimmäisen jakson perusteella laskettu nykyarvo

$$NA(n) = -B + \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{(1+i)^j}.$$

Kun tämä lauseke muuttuu negatiivisesta positiiviseksi, voimme sanoa, että projekti on maksanut itsensä takaisin. Tämä tapahtuu 20.4 kuukauden kuluttua.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2				H =	12000		perusinvestointi	
3	i_tod =	0.08		JA =	2000		jäännösarvo	
4	i_kk =	0.00643403		N =	21		kesto	
5			D	B =	10252.01		rahoitustarve	B = H-JA/(1+i)^n
6								
7		0	-10252.01		-10252.01			
8		1	-4000		-14226.44			
9		2	-1500		-15707.32		'= C7+NPV(B4,C$8:C9)	
10		3	500		-15216.85		'= C7+NPV(B4,C$8:C10)	
11		4	1000		-14242.18		'= C7+NPV(B4,C$8:C11)	
12		5	1000		-13273.74		jne…	
13		6	1000		-12311.48			
14		7	1000		-11355.39			
15		8	1000		-10405.40			
16		9	1000		-9461.49			
17		10	1000		-8523.61			
18		11	1000		-7591.72			
19		12	1000		-6665.80			
20		13	1000		-5745.79			
21		14	1000		-4831.67			
22		15	1000		-3923.38			
23		16	1000		-3020.91			
24		17	1000		-2124.20			
25		18	1000		-1233.23			
26		19	1000		-347.96			
27		20	1000		**531.66**		tässä päästiin plussalle	
28		21	1000		**1405.66**			

Vastaus: Projektien takaisinmaksuajat ovat $n_C^* = 29.4$kk ja $n_D^* = 20.4$kk.

Huomautus: Vaikka projektin D takaisinmaksuaika on pienempi kuin projektin C takaisinmaksuaika, tästä ei pidä vetää liian pikaista johtopäätöstä. Kannattaa miettiä seuraavia asioita:

- Miten kauan projekti jatkuu vielä sen jälkeen kun se on maksanut itsensä takaisin?
- Miten hyvin jännösarvo osataan ennakoida?
- Miten herkkä projektin kannattavuus on jännösarvon suhteen?

Kaavoja:

$$\begin{aligned}\text{yksinkertainen korkolasku: } & K_t = (1+it)K_0 = (1+\frac{p}{100}t)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1 \\ \text{koronkorkolasku: } & K_t = (1+i)^t K_0, \text{ kun } t = 1,2,3,\ldots \\ \text{jatkuva korkolasku: } & K_t = (1+i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1+i) = e^{\rho}\end{aligned}$$

Jaksolliset suoritukset prolongointitekijä, diskonttaustekijä, kuoletuskerroin

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \qquad a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}, \qquad c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Pääoman tuottoaste

$$ROI_{II} = \frac{k}{H} \cdot 100\%, \qquad ROI_I = \frac{k}{H/2} \cdot 100\%, \qquad ROI_I^* = \frac{(k_{kk} - H/n) \cdot 12}{H/2} \cdot 100\%$$

Takaisinmaksuaika

$$n^* = \frac{\ln(k/(k-iB))}{\ln(1+i)}$$