Vaasan yliopisto
UNIVERSITY OF VAASA

kevät 2019 / orms.1030

Talousmatematiikan perusteet

6. harjoitus, viikko 9 (425.02.–1.03.2019)

L	Ma	10–12	A202	R05	Ti	14–16	F453
R01	Ma	12–14	F453	L	To	08–10	A202
R02	Ma	16–18	F453	R06	To	12–14	F140
R03	Ti	08–10	F425	R07	Pe	08–10	F453
R04	Ti	12–14	F453	R08	Pe	10–12	F453

1. Laske integraalit

$$\text{a)}\quad \int (6x^2+4x+3)dx, \qquad \text{b)}\quad \int (x+1)(x-1)dx, \qquad \text{c)}\quad \int x(x^2-1)^2 dx$$

2. Laske integraalit

$$\text{a)}\quad \int_1^4 (2x+4)dx, \qquad \text{b)}\quad \int_2^5 \left(x+\frac{1}{x}\right) dx$$

3. Jos projekti synnyttää jatkuvan vakio-kassavirran, sen nettonykyarvon lausekkeessa esiintyy seuraavia osia

$$\frac{k}{\rho}, \qquad e^{-\rho t_1}, \qquad e^{-\rho t_2},$$

$$\begin{aligned} \text{missä} \qquad k &= \text{kassavirran voimakkuus} \left(\frac{€}{\text{jakso}}\right) \\ \rho &= \ln(1+i_{jakso}) = \text{korkointensiteetti} \left(\frac{1}{\text{jakso}}\right) \\ t_1 &= \text{kassavirran alkuhetki (jaksoa)} \\ t_2 &= \text{kassavirran loppuhetki (jaksoa)} \end{aligned}$$

Olkoon projektin synnyttämän jatkuvan kassavirran voimakkuus $k = 100$ €/kk. Kassavirta alkaa hetkellä $t_1 = 0$ (vuotta) ja päättyy hetkellä $t_2 = 2,5$ (vuotta). Laskentakorkokanta on 6% (p.a.).

$$\text{Laske arvot lausekkeille} \qquad \frac{k}{\rho}, \qquad e^{-\rho t_1}, \qquad e^{-\rho t_2}$$

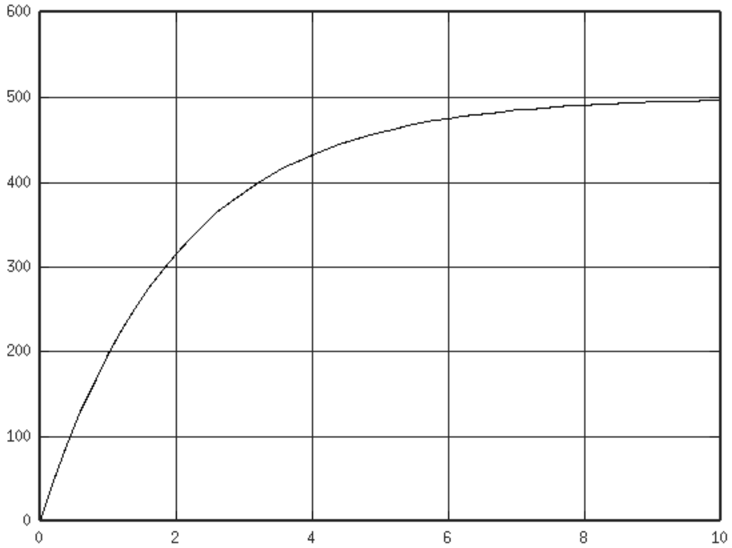
a) kun $k = 1200$€/vuosi, $\rho = \ln(1,06)\frac{1}{\text{vuosi}}$, $t_1 = 0$vuotta, $t_2 = 2,5$vuotta,
b) kun $k = 100$€/kk, $\rho = \ln(1,06^{1/12})\frac{1}{\text{kk}}$, $t_1 = 0$kk, $t_2 = 30$kk.

4. Vakiokassavirta $k = 280$€/kk alkaa 10 päivän kuluttua ja kestää 40 päivää ($t_1 = 10$ ja $t_2 = 50$). Viikonloput eivät katkaise kassavirtaa, ja voimme soveltaa saksalaista laskutapaa (1 kk = 30 päivää). Jäännösarvoa ei ole ($JA = 0$). Laske hetkeen $t_0 = 0$ laskettu nykyarvo, kun laskentakorko on 3.25% (p.a.).

$$\text{Kaava:} \qquad NA = \frac{k}{\rho}\left(e^{-\rho t_1} - e^{-\rho t_2}\right)$$

5. Kassavirta $k(t)$ alkaa hetkellä $t = 0$(kk) ja kasvaa kuvan mukaisesti. Kassavirtaa voidaan mallintaa lausekkeella

$$k(t) = a\left(1 - e^{-b\cdot t}\right), \qquad a = 500\frac{€}{\mathrm{kk}}, \quad b = 0.5\frac{1}{\mathrm{kk}}, \quad t = \text{ aika kuukausissa}$$



Laske kassakertymä ajalta $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\text{kertymä} = \int_{t_0}^{t_1} k(t)dt, \qquad t_0 = 0\,\mathrm{kk}, \quad t_1 = 10\,\mathrm{kk}$$

ja laske kassavirran nykyarvo samalta aikajaksolta

$$PV = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho\cdot t}k(t)dt, \qquad t_0 = 0\,\mathrm{kk}, \quad t_1 = 10\,\mathrm{kk}$$

kun laskentakorko on 5% p.a. eli kuukausi-jakson korkotekijä on $1 + i_{kk} = 1{,}05^{1/12}$ ja vastaava kuukausijakson korkointensiteetti on

$$\rho = \ln\left(1{,}05^{1/12}\right)\frac{1}{\mathrm{kk}}$$

6. Olkoon x satunnaismuuttuja, joka saa arvoja väliltä $0 \leq x \leq 2$. Satunnaismuuttujan x jakauma noudattaa todennäköisyystiheyttä $f(x) = ax$.
a) Millä a:n arvolla

$$\int_0^2 f(x)dx = 1.$$

b) Laske x:n odotusarvo

$$\langle x\rangle = \int_0^2 xf(x)dx,$$

Kaavoja:

$$\begin{aligned}
\text{yksinkertainen korkolasku:}\quad K_t &= (1+it)K_0 = (1+\frac{p}{100}t)K_0, \text{ kun } 0<t<1 \\
\text{koronkorkolasku:}\quad K_t &= (1+i)^t K_0, \text{ kun } t = 1,2,3,\ldots \\
\text{jatkuva korkolasku:}\quad K_t &= (1+i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t>1 \text{ ja } (1+i) = e^{\rho}
\end{aligned}$$

Jaksolliset suoritukset prolongointitekijä, diskonttaustekijä, kuoletuskerroin

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \qquad a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}, \qquad c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Takaisinmaksuaika (jaksollinen vakio-kassavirta)

$$n^* = \frac{\ln(k/(k-iB))}{\ln(1+i)}$$

Takaisinmaksuaika (jatkuva vakio-kassavirta)

$$n^* = \frac{\ln(k/(k-\rho B))}{\rho}$$

Projektin nettonykyarvo jatkuvan vakiotulovirran tapauksessa:

$$NNA = -H + \frac{k}{\rho}(e^{-\rho(t_1-t_0)} - e^{-\rho(t_2-t_0)}) + e^{-\rho(t_2-t_0)}JA.$$

Integraaleja:

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$\int a\cdot e^{bx}dx = \frac{a}{b}\cdot e^{bx} + C$$

$$\int Ae^{-\rho x}dx = \frac{-A}{\rho}e^{-\rho x} + C \qquad \longrightarrow \qquad \int_{t_0}^{t_1} Ae^{-\rho x}dx = \frac{A}{\rho}\left(-e^{-\rho t_1} + e^{-\rho t_0}\right)$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C, \text{kun } x > 0$$