Vaasan yliopisto
UNIVERSITY OF VAASA

kevät 2019 / orms.1030

Talousmatematiikan perusteet

6. harjoitus, viikko 9 (425.02.–1.03.2019)

L	Ma	10–12	A202	R05	Ti	14–16	F453
R01	Ma	12–14	F453	L	To	08–10	A202
R02	Ma	16–18	F453	R06	To	12–14	F140
R03	Ti	08–10	F425	R07	Pe	08–10	F453
R04	Ti	12–14	F453	R08	Pe	10–12	F453

1. Laske integraalit

$$\text{a)}\quad \int (6x^2+4x+3)dx, \qquad \text{b)}\quad \int (x+1)(x-1)dx, \qquad \text{c)}\quad \int x(x^2-1)^2 dx$$

Ratkaisu:

a) termi kerrallaan kaavalla $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$.

$$\begin{aligned}\int (6x^2+4x+3)dx &= \frac{6}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + 3x + C \\ &= 2x^3 + 2x^2 + 3x + C\end{aligned}$$

b)

$$\int (x+1)(x-1)dx = \int (x^2-1)dx = \frac{1}{3}x^3 - x + C$$

c) Tehdään laskun aikana muuttujan vaihto $x \to t = x^2 - 1$, jolloin $dt = 2xdx$, ja

$$\begin{aligned}\int x(x^2-1)^2 dx &= \frac{1}{2}\int (x^2-1)^2 2xdx \\ &= \frac{1}{2}\int t^2 dt = \frac{1}{6}t^3 + C \\ &= \frac{1}{6}(x^2-1)^3 + C\end{aligned}$$

---

2. Laske integraalit

$$\text{a)}\quad \int_1^4 (2x+4)dx, \qquad \text{b)}\quad \int_2^5 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$$

Ratkaisu:

a)

$$\begin{aligned}\int_1^4 (2x+4)dx &= \Big/_1^4 (x^2+4x) \\ &= (4^2 + 4\cdot 4) - (1^2 + 4\cdot 1) = (16+16) - (1+4) = 27\end{aligned}$$

b)

$$\int_2^5 \left(x+\frac{1}{x}\right) dx = \Big/_2^5 \left(\frac{1}{2}x^2+\ln x\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}5^2+\ln 5\right) - \left(\frac{1}{2}2^2+\ln 2\right)$$
$$= 12,5+\ln 5-2-\ln 2$$
$$\approx 11,416$$

---

3. Jos projekti synnyttää jatkuvan vakio-kassavirran, sen nettonykyarvon lausekkeessa esiintyy seuraavia osia

$$\frac{k}{\rho}, \qquad e^{-\rho t_1}, \qquad e^{-\rho t_2},$$

$$\begin{aligned} \text{missä} \qquad k &= \text{kassavirran voimakkuus} \left(\frac{€}{\text{jakso}}\right) \\ \rho &= \ln(1+i_{jakso}) = \text{korkointensiteetti} \left(\frac{1}{\text{jakso}}\right) \\ t_1 &= \text{kassavirran alkuhetki (jaksoa)} \\ t_2 &= \text{kassavirran loppuhetki (jaksoa)} \end{aligned}$$

Olkoon projektin synnyttämän jatkuvan kassavirran voimakkuus $k = 100$ €/kk. Kassavirta alkaa hetkellä $t_1 = 0$ (vuotta) ja päättyy hetkellä $t_2 = 2,5$ (vuotta). Laskentakorkokanta on 6% (p.a.).

$$\text{Laske arvot lausekkeille} \qquad \frac{k}{\rho}, \qquad e^{-\rho t_1}, \qquad e^{-\rho t_2}$$

a) kun $k = 1200$€/vuosi, $\rho = \ln(1,06)\frac{1}{\text{vuosi}}$, $t_1 = 0$vuotta, $t_2 = 2,5$vuotta,
b) kun $k = 100$€/kk, $\rho = \ln(1,06^{1/12})\frac{1}{\text{kk}}$, $t_1 = 0$kk, $t_2 = 30$kk.

Ratkaisu:

$$\text{a)} \qquad \frac{k}{\rho} = \frac{1200\frac{€}{\text{vuosi}}}{\ln(1,06)\frac{1}{\text{vuosi}}} = \frac{1200€}{\ln(1,06)} = 20\,594,17€$$

$$\text{b)} \qquad \frac{k}{\rho} = \frac{100\frac{€}{\text{kk}}}{\ln(1,06^{1/12})\frac{1}{\text{kk}}} = \frac{100€}{\frac{1}{12}\ln(1,06)} = \frac{1200€}{\ln(1,06)} = \text{sama}$$

$$\text{a)} \qquad e^{-\rho t_1} = \exp(-\ln(1,06)\frac{1}{\text{vuosi}} \cdot 0 \text{ vuotta}) = \exp(0) = 1$$

$$\text{b)} \qquad e^{-\rho t_1} = \exp(-\ln(1,06^{1/12})\frac{1}{\text{kk}} \cdot 0 \text{ kk}) = \exp(0) = \text{ sama}$$

$$\text{a)} \qquad e^{-\rho t_2} = \exp(-\ln(1,06)\frac{1}{\text{vuosi}} \cdot 2,5 \text{ vuotta}) = \left(e^{\ln(1,06)}\right)^{-2,5} = \frac{1}{1,06^{2,5}}$$
$$= 0,864440959$$

$$\text{b)} \qquad e^{-\rho t_2} = \exp(-\ln(1,06^{1/12})\frac{1}{\text{kk}} \cdot 30 \text{ kk})$$
$$= \exp(\frac{1}{12}\ln(1,06) \cdot (-30)) = \left(e^{\ln(1,06)}\right)^{-30/12} = \frac{1}{1,06^{30/12}} = \text{ sama}$$

---

4. Vakiokassavirta $k = 280€/\text{kk}$ alkaa 10 päivän kuluttua ja kestää 40 päivää ($t_1 = 10$ ja $t_2 = 50$). Viikonloput eivät katkaise kassavirtaa, ja voimme soveltaa saksalaista laskutapaa (1 kk = 30 päivää). Jäännösarvoa ei ole ($JA = 0$). Laske hetkeen $t_0 = 0$ laskettu nykyarvo, kun laskentakorko on 3.25% (p.a.).

$$\text{Kaava:} \qquad NA = \frac{k}{\rho}\left(e^{-\rho t_1} - e^{-\rho t_2}\right)$$

Ratkaisu:

käytetään kuukausi-jaksotusta

$$\frac{k}{\rho} = \frac{280\,\frac{€}{\text{kk}}}{\ln\left(1,0325^{1/12}\right)\frac{1}{\text{kk}}} = \frac{280€}{\ln\left(1,0325^{1/12}\right)}$$

$$\begin{aligned} e^{-\rho t_1} &= \exp\left(-\ln\left(1,0325^{1/12}\right)\frac{1}{\text{kk}}\cdot\frac{10}{30}\text{kk}\right) \\ &= \exp\left(-\ln\left(1,0325^{1/12}\right)\cdot\frac{10}{30}\right) \\ &= \left(e^{\ln(1,0325)}\right)^{-10/360} = \frac{1}{1,0325^{10/360}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-\rho t_2} &= \exp\left(-\ln\left(1,0325^{1/12}\right)\frac{1}{\text{kk}}\cdot\frac{50}{30}\text{kk}\right) \\ &= \frac{1}{1,0325^{50/360}} \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} NA &= \frac{k}{\rho}\left(e^{-\rho t_1} - e^{-\rho t_2}\right) \\ &= \frac{280€}{\ln\left(1,0325^{1/12}\right)}\left(\frac{1}{1,0325^{10/360}} - \frac{1}{1,0325^{50/360}}\right) \\ &= 372,34€ \end{aligned}$$

Kassavirran nykyarvo on $NA = 372,34\,€$.

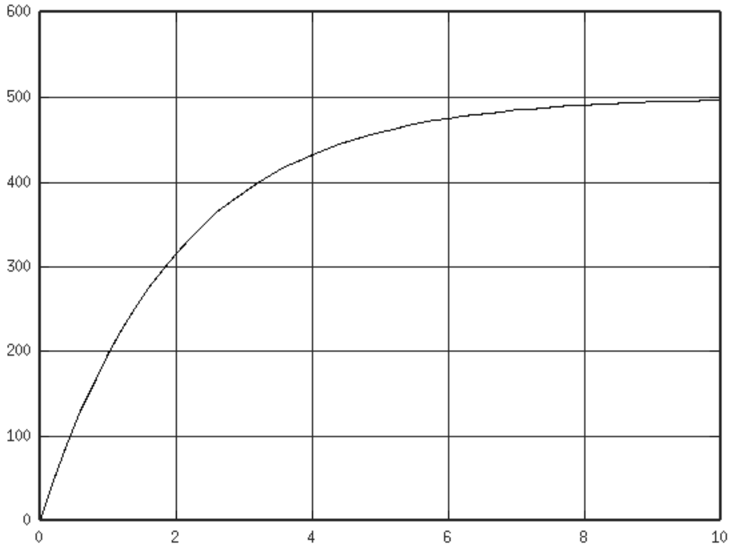
Tarkistus: Ilman diskonttausta kertymä on

$$280\frac{€}{\text{kk}}\cdot 40\text{päivää} = 280\frac{€}{\text{kk}}\cdot\frac{40}{30}\text{kk} = 373.33€ > NA \qquad \text{OK}$$

---

5. Kassavirta $k(t)$ alkaa hetkellä $t = 0$(kk) ja kasvaa kuvan mukaisesti. Kassavirtaa voidaan mallintaa lausekkeella

$$k(t) = a\left(1 - e^{-b\cdot t}\right), \qquad a = 500\frac{€}{\text{kk}}, \quad b = 0.5\frac{1}{\text{kk}}, \quad t = \text{ aika kuukausissa}$$



Laske kassakertymä ajalta $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\text{kertymä} = \int_{t_0}^{t_1} k(t)dt, \qquad t_0 = 0\,\text{kk}, \quad t_1 = 10\,\text{kk}$$

ja laske kassavirran nykyarvo samalta aikajaksolta

$$PV = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho \cdot t} k(t)dt, \qquad t_0 = 0\,\text{kk}, \quad t_1 = 10\,\text{kk}$$

kun laskentakorko on 5% p.a. eli kuukausi-jakson korkotekijä on $1 + i_{kk} = 1{,}05^{1/12}$ ja vastaava kuukausijakson korkointensiteetti on

$$\rho = \ln\left(1{,}05^{1/12}\right)\frac{1}{\text{kk}}$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned}
\text{kertymä} &= \int_{t_0}^{t_1} k(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} a\left(1 - e^{-b\cdot t}\right)dt = \int_{t_0}^{t_1}\left(a - ae^{-b\cdot t}\right)dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} adt - \int_{t_0}^{t_1} ae^{-b\cdot t}dt = \Big/_{t_0}^{t_1} at - \Big/_{t_0}^{t_1} \frac{-a}{b}e^{-b\cdot t}dt \\
&= (at_1 - at_0) + \frac{a}{b}(e^{-bt_1} - e^{-bt_0}) \\
&= \left(500\frac{€}{\text{kk}}\cdot 10\,\text{kk} - 0\right) + \frac{500\frac{€}{\text{kk}}}{0{,}5\frac{1}{\text{kk}}}\left(\exp\left(-0.5\frac{1}{\text{kk}}\cdot 10\text{kk}\right) - 1\right) \\
&= 5000€ + 1000€\cdot\left(e^{-5} - 1\right) = 4\,006{,}74€
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{PV} &= \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho t} \cdot k(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(a e^{-\rho t} - a e^{-(b+\rho)\cdot t} \right) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} a e^{-\rho \cdot t} dt - \int_{t_0}^{t_1} a e^{-(b+\rho)\cdot t} dt = \Big/_{t_0}^{t_1} \frac{-a}{\rho} e^{-b\cdot t} dt - \Big/_{t_0}^{t_1} \frac{-a}{b+\rho} e^{-(b+\rho)\cdot t} dt \\
&= \frac{a}{\rho}(-e^{-\rho t_1} + e^{-\rho t_0}) - \frac{a}{b+\rho}(-e^{-(b+\rho)t_1} + e^{-(b+\rho)t_0}) \\
&= \frac{500€}{\ln(1,05^{1/12})} \left(-\exp\left(-\ln 1,05^{1/12} \cdot 10 \right) + 1 \right) + \ldots \\
&\quad - \frac{500€}{0,5 + \ln(1,05^{1/12})} \left(-\exp\left(-(0,5 + \ln(1,05^{1/12})) \cdot 10 \right) + 1 \right) \\
&= \frac{500€}{\ln(1,05^{1/12})} \left(\frac{-1}{1,05^{10/12}} + 1 \right) - \frac{500€}{0,5 + \ln(1,05^{1/12})} \left(\frac{-e^{-5}}{1,05^{10/12}} + 1 \right) \\
&= 4\,899,72€ - 985,52€ = 3\,914,20€
\end{aligned}
$$

---

6. Olkoon x satunnaismuuttuja, joka saa arvoja väliltä $0 \leq x \leq 2$. Satunnaismuuttujan x jakauma noudattaa todennäköisyystiheyttä $f(x) = ax$.

a) Millä a:n arvolla

$$\int_0^2 f(x) dx = 1.$$

b) Laske x:n odotusarvo

$$\langle x \rangle = \int_0^2 x f(x) dx,$$

Ratkaisu:

a) a:lla pitää olla sellainen arvo, että

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 a x dx = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \Big/_0^2 \frac{a}{2} x^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow (\frac{a}{2} \cdot 2^2) - (0) = 1 \\
&\Leftrightarrow a = 1/2
\end{aligned}
$$

b) Odotusarvo on

$$
\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int_0^2 x f(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} x dx \\
&= \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 dx = \Big/_0^2 \frac{1}{6} x^3 \\
&= \left(\frac{1}{6} \cdot 2^3 \right) - \left(\frac{1}{6} \cdot 0^3 \right) = \frac{8}{6} - 0 = \frac{4}{3} \approx 1.333
\end{aligned}
$$

Kaavoja:

$$
\begin{aligned}
\text{yksinkertainen korkolasku: } K_t &= (1+it)K_0 = (1+\frac{p}{100}t)K_0, \text{ kun } 0<t<1 \\
\text{koronkorkolasku: } K_t &= (1+i)^t K_0, \text{ kun } t = 1,2,3,\dots \\
\text{jatkuva korkolasku: } K_t &= (1+i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1+i) = e^{\rho}
\end{aligned}
$$

Jaksolliset suoritukset prolongointitekijä, diskonttaustekijä, kuoletuskerroin

$$
s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \qquad a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}, \qquad c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}
$$

Takaisinmaksuaika (jaksollinen vakio-kassavirta)

$$
n^* = \frac{\ln(k/(k-iB))}{\ln(1+i)}
$$

Takaisinmaksuaika (jatkuva vakio-kassavirta)

$$
n^* = \frac{\ln(k/(k-\rho B))}{\rho}
$$

Projektin nettonykyarvo jatkuvan vakiotulovirran tapauksessa:

$$
NNA = -H + \frac{k}{\rho}(e^{-\rho(t_1-t_0)} - e^{-\rho(t_2-t_0)}) + e^{-\rho(t_2-t_0)} JA.
$$

Integraaleja:

$$
\begin{aligned}
\int ax^n dx &= \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C \\
\int a \cdot e^{bx} dx &= \frac{a}{b} \cdot e^{bx} + C \\
\int Ae^{-\rho x} dx &= \frac{-A}{\rho} e^{-\rho x} + C \qquad \longrightarrow \qquad \int_{t_0}^{t_1} Ae^{-\rho x} dx = \frac{A}{\rho}\left(-e^{-\rho t_1} + e^{-\rho t_0}\right) \\
\int \frac{1}{x} dx &= \ln x + C, \text{kun } x > 0
\end{aligned}
$$