

Talousmatematiikan perusteet

7. harjoitus, viikko 10 (4.03.–8.03.2019)

L	Ma	10–12	A202	R05	Ti	14–16	F453
R01	Ma	12–14	F345	L	To	08–10	A202
R02	Ma	16–18	F453	R06	To	12–14	F141
R03	Ti	08–10	F453	R07	Pe	08–10	F453
R04	Ti	12–14	F453	R08	Pe	10–12	F453

1. Oheisessa taulukossa on erään tuotteen hintaindeksejä. Laske hinnan keskimääräinen kasvuvauhti vuosina 2000–2005

vuosi	indeksi
1998	100
1999	104
2000	109
2001	112
2002	115
2003	118
2004	121
2005	124
2006	130

Ratkaisu:

keskimääräinen kasvutekijä on

$$1 + r = \left(\frac{X_{2005}}{x_{2000}} \right)^{1/5} = \left(\frac{124}{109} \right)^{1/5} = 1,026122 \approx 1,0261$$

Vastaus: Keskimääräinen vuosikasvu on ollut 2,61% vuosina 2000–2005.

2. Erään tuotekorin osalta tiedetään vuosien 2000 ja 2010 hinnat ja ostojen määrät. Perusjankohta on nyt 2000 ja vertailuajankohta 2010

tuote	2000		2010	
	p_0	q_0	p_t	q_t
1	15,00	100	10,00	300
2	8,00	200	15,00	100
3	30,00	20	20,00	150

- Laske Laspeyres'in ja Paashenin hinta-indeksit.
- Kerro sanallisesti, miksi indeksit eroavat niin paljon.

Ratkaisu:

$$P_{t_0:t}^L = \frac{\sum_i p_{t,i} q_{t_0,i}}{\sum_i p_{t_0,i} q_{t_0,i}} \cdot 100 = \frac{10 \cdot 100 + 15 \cdot 200 + 20 \cdot 20}{15 \cdot 100 + 8 \cdot 200 + 30 \cdot 20} \cdot 100 = 118,9$$

$$P_{t_0:t}^P = \frac{\sum_i p_{t,i} q_{t,i}}{\sum_i p_{t_0,i} q_{t,i}} \cdot 100 = \frac{10 \cdot 300 + 15 \cdot 100 + 20 \cdot 150}{15 \cdot 300 + 8 \cdot 100 + 30 \cdot 150} \cdot 100 = 76,5$$

b) Laspeyresin indeksissä suurimman painon saa tuote 2, jonka hinta nousi huomattavasti. Paaschenin indeksissä suurimman painon saa tuote 1, jonka hinta laski huomattavasti. Se tuote, jota painotetaan muita enemmän vaikuttaa indeksiin muite enemmän, siksi Laspeyresin indeksi tulee suuremmaksi kuin Paaschenin indeksi.

3. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$$

Ratkaisu:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 13 \end{array} \right) \begin{array}{l} *(-3) \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + y = 3 & (1) \\ 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow y = 2$$

$$(1) \rightarrow x + 2 = 3 \rightarrow x = 1$$

Siis, **Vastaus:** $x = 1$ ja $y = 2$.

Tarkistus:

$$\begin{cases} 1 + 2 = 3 & \text{ok} \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 13 & \text{ok} \end{cases}$$

4.

Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 4x + 5y - 3z = 3 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

Ratkaisu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 2 \\ 2 & 1 & 1 & | & 3 \\ 4 & 5 & -3 & | & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} *(-2) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} *(-4) \\ \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 2 \\ 0 & -3 & 5 & | & -1 \\ 0 & -3 & 5 & | & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} *(-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 2 \\ 0 & -3 & 5 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -4 \end{pmatrix} \text{ kolmas yhtälö on aina epätosi!}$$

Vastaus: Yhtälöryhmän ratkaisujoukko on tyhjä.

5. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 5y = 8 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

Ratkaisu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 2 & 1 & | & 2 \\ 4 & 5 & | & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} *(-2) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} *(-4) \\ \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -3 & | & -4 \\ 0 & -3 & | & -4 \end{pmatrix} \text{ kopio pois}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & -3 & | & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

$$(2) \rightarrow y = \frac{4}{3}$$

$$(1) \rightarrow x + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{9}{3} \rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Vastaus: $x = \frac{1}{3}$ ja $y = \frac{4}{3}$

Tarkistus:

$$\begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} & \text{ok} \\ 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{3} & \text{ok} \\ \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{9}{3} & \text{ok} \end{cases}$$

6. Etsi ainakin yksi ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 3x + 5y - 2z = 4 \end{cases}$$

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} *(-3) \\ \leftarrow + \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 7 \end{array} \right) \\ & \longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ -y - 5z = 7 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -z - 1 & (1) \\ -y = 5z + 7 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Yksi ratkaisu: Valitaan z :lle arvoksi $z = 1$. Silloin x ja y voidaan ratkaista yhtälöistä (2) ja (1) seuraavasti:

$$\begin{aligned} (2) & \rightarrow -y = 5 \cdot 1 + 7 \quad \rightarrow y = -12 \\ (1) & \rightarrow x + 2 \cdot (-12) = -1 - 1 \quad \rightarrow x = 22 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 22, y = -12, z = 1$.

Tarkistus:

$$\begin{cases} 22 + 2 \cdot (-12) + 1 = 22 - 24 + 1 = -1 & \text{OK} \\ 3 \cdot 22 + 5 \cdot (-12) - 2 \cdot 1 = 66 - 60 - 2 = 4 & \text{OK} \end{cases}$$

Kaikki ratkaisut: Valitaan $z = a \in \mathbb{R}$, missä a saa olla mikä tahansa reaaliluku. Silloin x ja y voidaan ratkaista yhtälöistä (2) ja (1) seuraavasti:

$$\begin{aligned} (2) & \rightarrow -y = 5a + 7 \quad \rightarrow y = -5a - 7 \\ (1) & \rightarrow x + 2 \cdot (-5a - 7) = -a - 1 \quad \rightarrow x = 9a + 13 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 9a + 13, y = -5a - 7, z = a$, missä $a \in \mathbb{R}$

Tarkistus:

$$\begin{cases} (9a + 13) + 2(-5a - 7) + a = (9 - 10 + 1)a + 13 - 14 = -1 & \text{OK} \\ 3(9a + 13) + 5(-5a - 7) - 2a = (27 - 25 - 2)a + 39 - 35 = 4 & \text{OK} \end{cases}$$

7. a) Tarkista sijoittamalla, että funktio

$$y(x) = 10 - C \cdot e^{-2x}$$

on Differentiaali-yhtälön

$$y' = 0.2 \cdot (100 - 10y)$$

ratkaisu.

b) Mikä arvo tulee valita vakiolle C , jotta funktion alkuarvo on $y(0) = 3$?

Ratkaisu: a) Ehdotetun ratkaisufunktion $y(x) = 10 - C \cdot e^{-2x}$ derivaatta on

$$y'(x) = \frac{d}{dx} (10 - C \cdot e^{-2x}) = 2C \cdot e^{-2x}$$

Sijoitetaan ja sievennetään Differentiaaliyhtälön vasen puoli (LHS eli Left Hand Side) ja Differentiaaliyhtälön oikea puoli (RHS eli Right Hand Side)

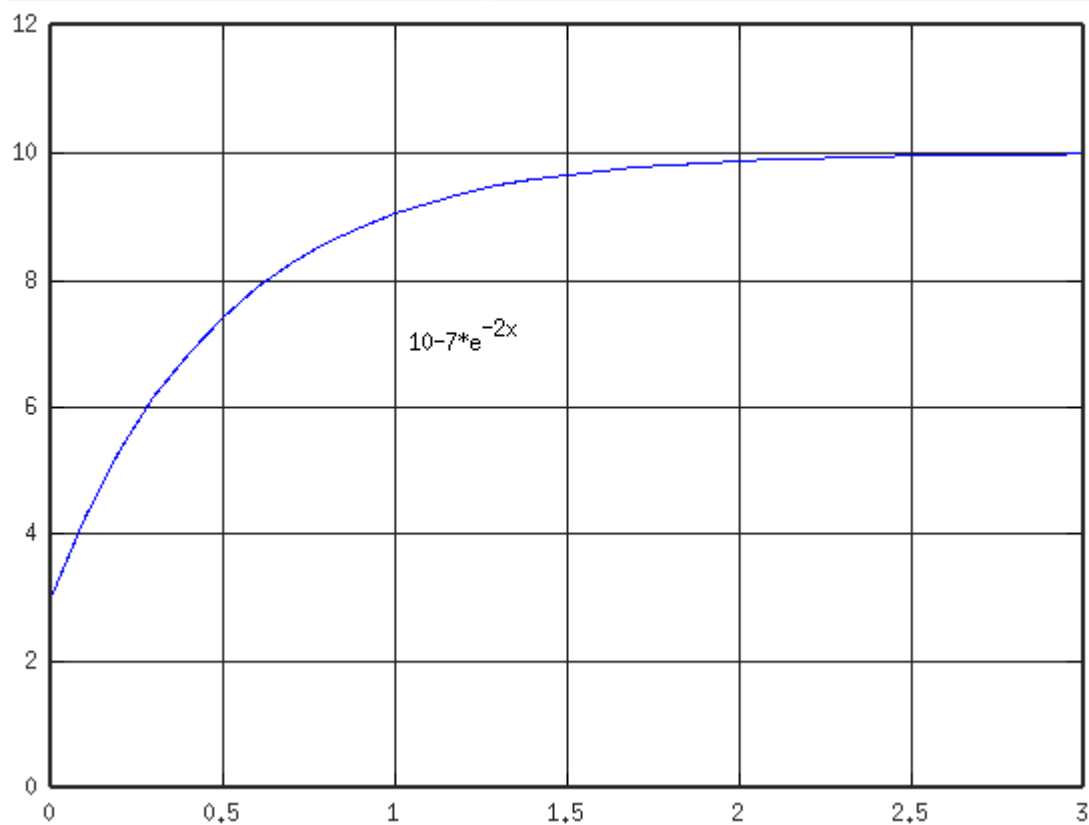
$$LHS = y'(x) = 2C \cdot e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} RHS &= 0.2 \cdot (100 - 10y) = 0.2 \cdot (100 - 10(10 - C \cdot e^{-2x})) \\ &= 0.2 \cdot (100 - 100 + 10C \cdot e^{-2x}) \\ &= 2C \cdot e^{-2x} \quad \text{samat!} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} y(0) &= 3 \\ \Leftrightarrow 10 - C \cdot e^{-2 \cdot 0} &= 3 \\ \Leftrightarrow 10 - C \cdot 1 &= 3 \\ \Leftrightarrow C &= 7 \end{aligned}$$

Vastaus: a) OK b) $C = 7$.



Kaavoja:

$$\begin{array}{ll} \text{Laspeyres} & P_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i P_{t;i} q_{t_0;i}}{\sum_i P_{t_0;i} q_{t_0;i}} \cdot 100, \quad Q_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i q_{t;i} P_{t_0;i}}{\sum_i q_{t_0;i} P_{t_0;i}} \cdot 100 \\ \text{Paaschen} & P_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i P_{t;i} q_{t;i}}{\sum_i P_{t_0;i} q_{t;i}} \cdot 100, \quad Q_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i q_{t;i} P_{t;i}}{\sum_i q_{t_0;i} P_{t;i}} \cdot 100 \\ \text{Fisher} & P_{t_0;t}^F = \sqrt{P_{t_0;t}^L \cdot P_{t_0;t}^P}, \quad Q_{t_0;t}^P = \sqrt{Q_{t_0;t}^L \cdot Q_{t_0;t}^P} \end{array}$$

yksinkertainen korkolasku: $K_t = (1 + it)K_0 = (1 + \frac{P}{100}t)K_0$, kun $0 < t < 1$

koronkorkolasku: $K_t = (1 + i)^t K_0$, kun $t = 1, 2, 3, \dots$

jatkuva korkolasku: $K_t = (1 + i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0$, kun $t > 1$ ja $(1 + i) = e^{\rho}$

Jaksolliset suoritukset prolongointitekijä, diskonttaustekijä, kuoletuskerroin

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \quad a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}, \quad c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Takaisinmaksuaika

$$n^* = \frac{\ln(k/(k - iB))}{\ln(1+i)}$$