Vaasan yliopisto
UNIVERSITY OF VAASA

kevät 2019 / orms.1030

Talousmatematiikan perusteet

8. harjoitus, viikko 11 (11.03.–15.03.2019)

L	Ma	10–12	A202	R05	Ti	14–16	F453
R01	Ma	12–14	F453	L	To	08–10	A202
R02	Ma	16–18	F453	R06	To	12–14	F140
R03	Ti	08–10	F425	R07	Pe	08–10	F453
R04	Ti	12–14	F453	R08	pe	10–12	F453

1. Yritys valmistaa muoviraaka-aineesta kahta tuotetta A ja B. Tuotteen A valmistaminen vie aikaa 15min ja raaka-ainetta 8kg. Tuotteen B valmistaminen vie aikaa 6min ja raaka-ainetta 5kg. Raaka-ainetta on olemassa 3000 kg/viikko ja laitteisto, jolla tuotteita valmistetaan on käytössä 40 tuntia viikossa. Yhden A-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 7 euroa ja yhden B-tuotteen valmistaminen tuottaa myyntivoittoa 5 euroa. Mahdollisesti käyttämättä jäänyt muoviraaka-aine voidaan myydä hintaan 120 euroa/tonni. Määrittele päätösmuuttujat ja muodosta lp-malli myyntivoiton maksimoimiseksi. (Älä ratkaise mallia.)

Ratkaisu:
Päätösmuuttujat:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{tuotteen A valmistus (kpl/viikko)} \\ x_2 &= \text{tuotteen B valmistus (kpl/viikko)} \\ x_3 &= \text{raaka-aineen myynti (kg/viikko)} \end{aligned}$$

Tavoitefunktio:

$$z = 7x_1 + 5x_2 + 0.120x_3$$

Rajoitteet:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{raaka-aine (kg):} & 8x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & \leq & 3000 \\ \text{aika (min):} & 15x_1 & + & 6x_2 & & & \leq & 40 \cdot 60 \end{array}$$

Vastaus: LP-malli

$$\left\{ \begin{array}{llcrcrcrcl} \max & z & = & 7x_1 & + & 5x_2 & + & 0.120 \cdot x_3 & & \\ \text{s.t.} & & & 8x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & \leq & 3000 \\ & & & 15x_1 & + & 6x_2 & & & \leq & 2400 \end{array} \right.$$

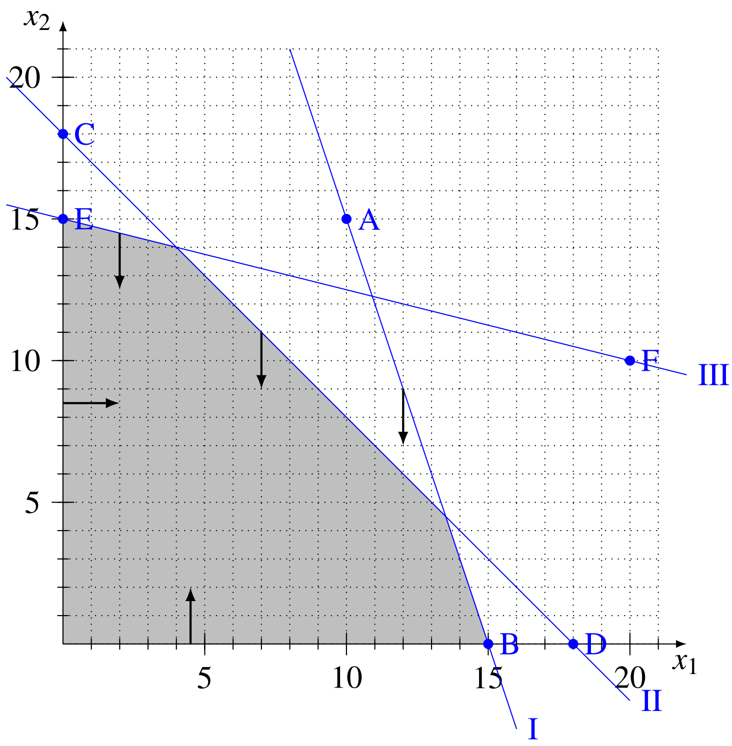
---

2. Ratkaise graafisesti seuraava lp-malli

$$\begin{array}{lrcrcl} \max z = & x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{ehdoin} & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 45 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\ & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 60 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

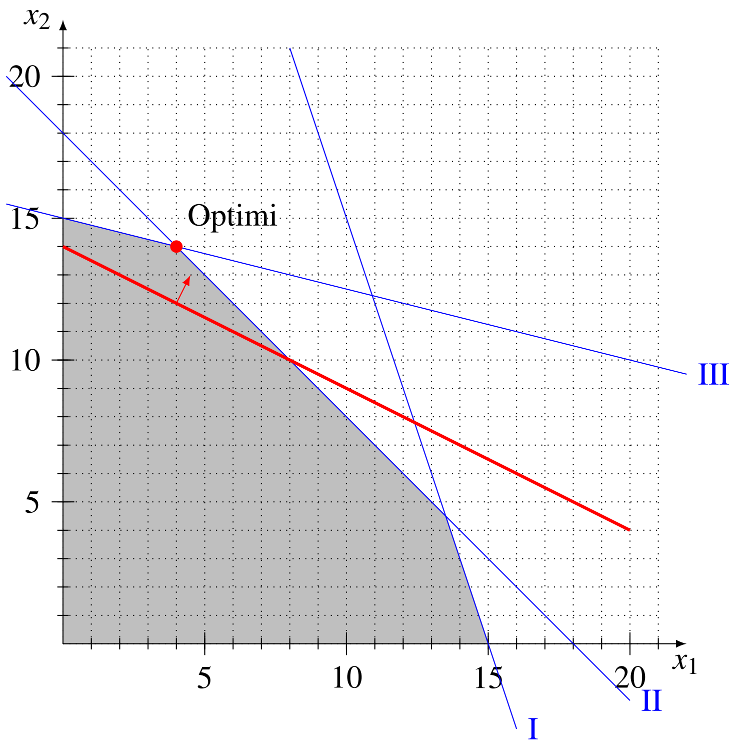
Ratkaisu: Käymme ensin läpi rajoitteet. Jokaisesta rajoitteesta kirjaamme rajoitteen, käyvän puolen ($\uparrow, \downarrow, \rightarrow, \leftarrow$), sekä kaksi rajoitesuoran pistettä.

1. raj.	$3x_1 + x_2 \leq 45$	$\downarrow$	$A = (10, 15)$	$B = (15, 0)$
2. raj.	$x_1 + x_2 \leq 18$	$\downarrow$	$C = (0, 18)$	$D = (18, 0)$
3. raj.	$x_1 + 4x_2 \leq 60$	$\downarrow$	$E = (0, 15)$	$F = (20, 10)$



Tavoitesuora:

tav. $x_1 + 2x_2 = 28$ $\uparrow$ $G = (0, 14)$ $H = (20, 4)$



Optimi on pisteessä, jossa rajoitesuorat II ja III leikkaavat toisensa. Siis

$$\begin{cases} II \\ III \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 18 & *(-1) \\ x_1 + 4x_2 = 60 & \leftarrow + \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 18 \\ 3x_2 = 42 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 14 \end{cases} \quad \text{ja} \quad z = 4 + 2 \cdot 14 = 32$$

Vastaus: optimissa $x_1 = 4$, $x_2 = 14$ ja tavoitefunktio saa arvon $z = 32$.

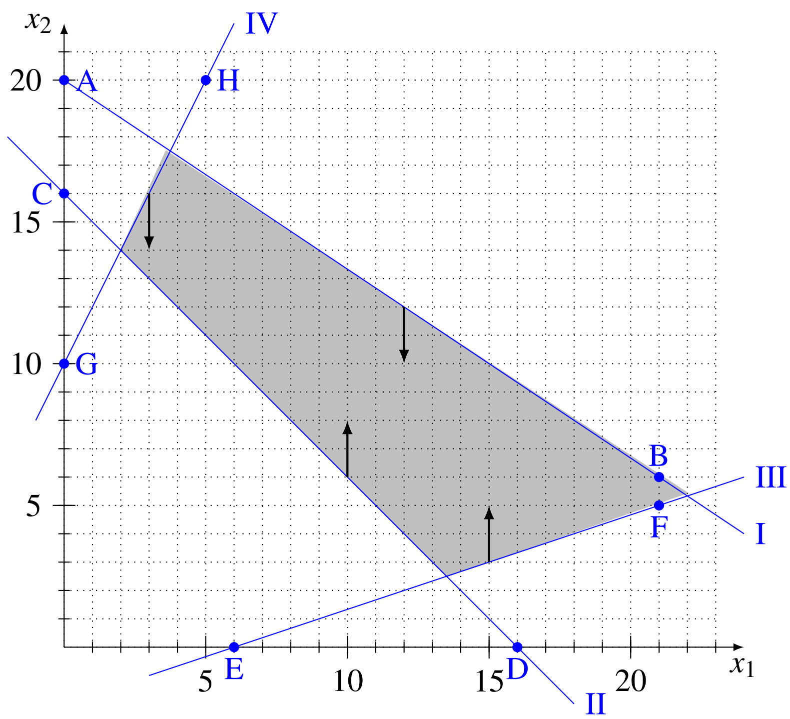
---

3. a) Piirrä seuraavan LP-mallin käypä alue ja b) ratkaise malli.

$$\begin{array}{lrcrcr} \min z = & x_1 & - & 5x_2 & & \\ \text{ehdoin} & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 60 \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 16 \\ & x_1 & - & 3x_2 & \leq & 6 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

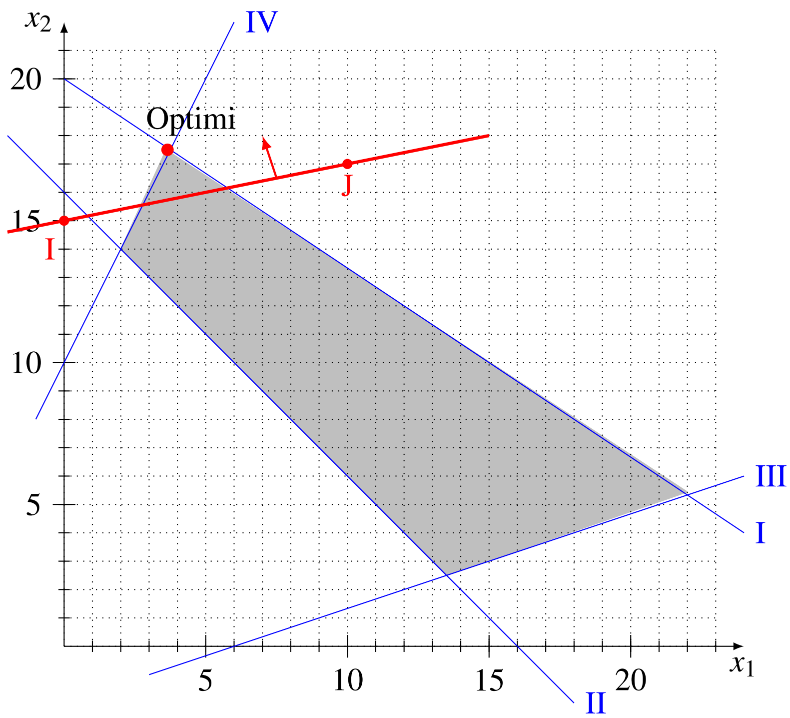
Ratkaisu:

1. raj.	$2x_1 + 3x_2 \leq 60$	$\downarrow$	$A = (0, 20)$	$B = (21, 6)$
2. raj.	$x_1 + x_2 \geq 16$	$\uparrow$	$C = (0, 16)$	$D = (16, 0)$
3. raj.	$x_1 - 3x_2 \leq 6$	$\uparrow$	$E = (6, 0)$	$F = (21, 5)$
4. raj.	$-2x_1 + x_2 \leq 10$	$\downarrow$	$G = (0, 10)$	$H = (5, 20)$



Tavoitesuora:

$$\text{tav.} \quad x_1 - 5x_2 = -75 \quad \uparrow \quad I = (0,15) \quad J = (10,17)$$



Optimissa rajoitteiden I ja IV rajoitesuorat leikkaavat. Siis

$$\begin{cases} I \\ IV \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 60 & *(1) \\ -2x_1 + x_2 = 10 & \leftarrow + \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 60 \\ 4x_2 = 70 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3.75 \\ x_2 = 17.50 \end{cases} \quad \text{ja} \quad z = 3.75 - 5 \cdot 17.50 = -83.75$$

Vastaus: optimissa $x_1 = 3.75$, $x_2 = 17.50$ ja tavoitefunktio saa arvon $z = -83.75$.

---

4. a) Pienyritys valmistaa kahta tuotetta 1 ja 2, ja myy kaiken valmistamansa. Kumpaakin tuotetta käsitellään neljällä osastolla seuraavan taulukon mukaisesti.

	tuotantoaika (tuntia)			
tuote	os. A	os. B	os. C	os D
1	4	2	6	1
2	4	3	1	2

Kullakin osastolla käytettävissä oleva työvoima on rajallinen siten, että työtunteja on osastoilla viikossa käytettävissä seuraavasti

osasto	työtunteja viikossa
A	120
B	220
C	300
D	80

Kate (myyntitulo - valmistuskustannukset) yhdeltä ”1”-tuotteelta on 300€ ja kate yhdeltä ”2”-tuotteelta 500€.
Muodosta LP-malli yrityksen kokonaiskatteen maksimoimiseksi. (Älä ratkaise mallia.)

b) Tehtävän yrityksen työaika-resurssi on 720 tuntia/viikossa eli 18 työntekijää.
Pohdi seuraavaa kysymystä: Jos yritykselle tarjoutuu mahdollisuus palkata kaksi uutta työntekijää, niin miten tämä uusi resurssi allokoidaan (sijoitetaan) eri osastoille?

Ratkaisu: a)
Päätösmuuttujat:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \text{tuotteen 1 valmistus (kpl/viikko)} \\ x_2 & = & \text{tuotteen 2 valmistus (kpl/viikko)} \end{array}$$

Tavoitefunktio:

$$z = 300x_1 + 500x_2$$

Rajoitteet:

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{osasto A (h):} & 4x_1 & + & 4x_2 & \leq & 120 \\ \text{osasto B (h):} & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 220 \\ \text{osasto C (h):} & 6x_1 & + & x_2 & \leq & 300 \\ \text{osasto D (h):} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 \end{array}$$

LP-malli

$$\left\{ \begin{array}{lccrcrcr} \max & z & = & 300x_1 & + & 500x_2 & & \\ \text{s.t.} & & & 4x_1 & + & 4x_2 & \leq & 120 \\ & & & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 220 \\ & & & 6x_1 & + & x_2 & \leq & 300 \\ & & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 80 \end{array} \right.$$

b) Kun on mahdollista palkata kaksi uutta työntekijää (80h työtä), niin haluamme selvittää mille osastoille uusi työresurssi kannattaa sijoittaa. Olkoon osastojen A, B, C, D uudet työresurssin lisäykset vastaavasti w_1, w_2, w_3, w_4. Silloin LP-malli menee muotoon

$$\left\{ \begin{array}{lccrcrrcr} \max & z & = & 300x_1 & + & 500x_2 & & & \\ \text{s.t.} & & & 4x_1 & + & 4x_2 & & \leq & 120 + w_1 \\ & & & 2x_1 & + & 3x_2 & & \leq & 220 + w_2 \\ & & & 6x_1 & + & x_2 & & \leq & 300 + w_3 \\ & & & x_1 & + & 2x_2 & & \leq & 80 + w_4 \\ & & & & & & w_1 + w_2 + w_3 + w_4 & = & 80 \end{array} \right.$$

tai systemaattisemmin

$$
\left\{
\begin{array}{llllllll}
\max & z = 300x_1 + 500x_2 & & & & & & \\
\text{s.t.} & 4x_1 + 4x_2 & -w_1 & & & & \leq & 120 \\
 & 2x_1 + 3x_2 & & -w_2 & & & \leq & 220 \\
 & 6x_1 + x_2 & & & -w_3 & & \leq & 300 \\
 & x_1 + 2x_2 & & & & -w_4 & \leq & 80 \\
 & & w_1 & +w_2 & +w_3 & +w_4 & = & 80
\end{array}
\right.
$$

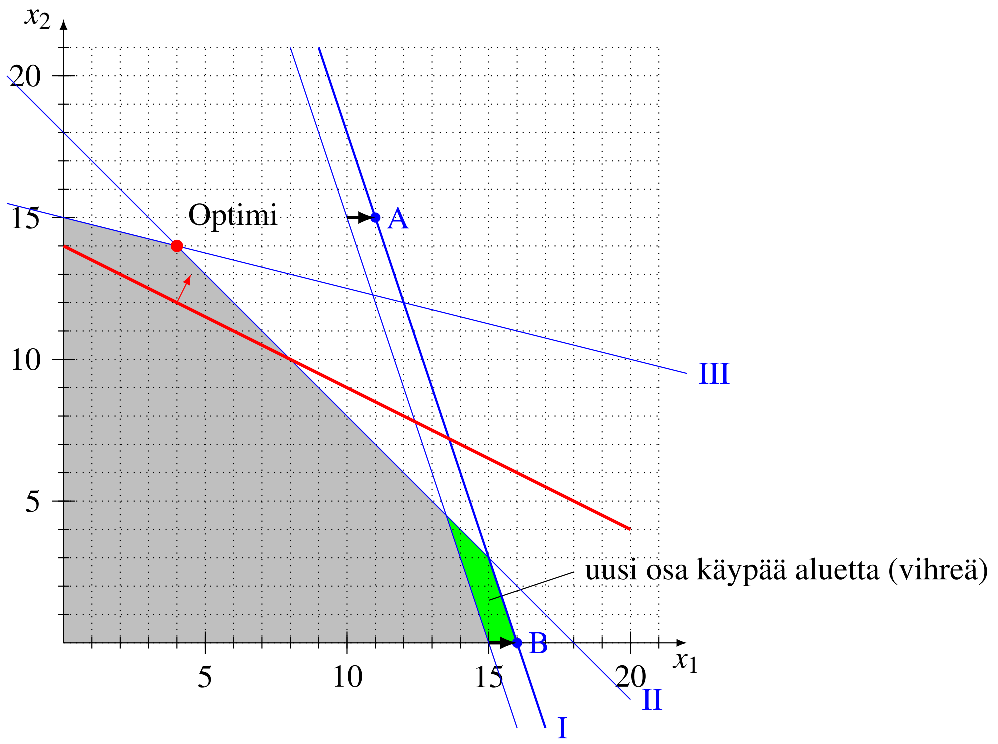
---

5. Miten tehtävän 2 ratkaisu muuttuu, jos ensimmäisen rajoitteen resurssia kasvatetaan kolmella. Uusi LP-malli:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max z = & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{ehdoin} & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 45+3 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 60 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Ratkaisu: Ensimmäisen rajoitteen rajoitesuora siirtyy yhden oikealle. Muuttunut ongelman graafinen esitys on seuraava.

$$
\begin{array}{llcll}
\text{1. raj.} & 3x_1 + x_2 \leq 45 + \mathbf{3} & \downarrow & A = (\mathbf{11}, 15) & B = (\mathbf{16}, 0) \\
\text{2. raj.} & x_1 + x_2 \leq 18 & \downarrow & C = (0, 18) & D = (18, 0) \\
\text{3. raj.} & x_1 + 4x_2 \leq 60 & \downarrow & E = (0, 15) & F = (20, 10)
\end{array}
$$



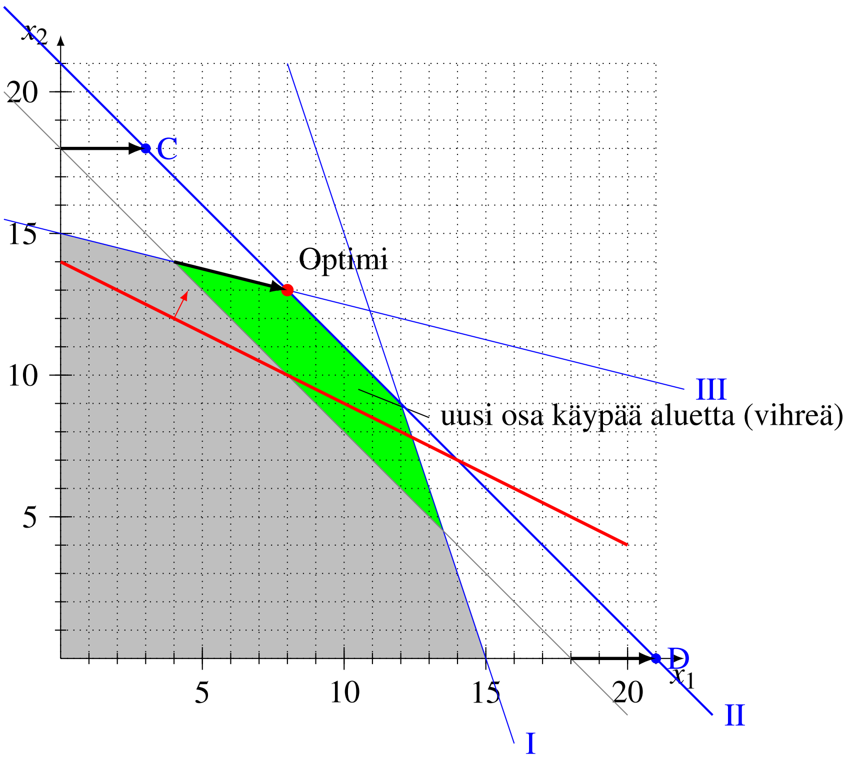
Käypä alue laajenee, mutta ”väärässä paikassa”. Optimi piste on eri osassa käyvän alueen reunaa, joten optimi ei muutu mitenkään. Päätösmuuttujien optimiarvot eivät muutu ja tavoitefunktion optimiarvo ei muutu.

6. **Miten tehtävän 2 ratkaisu muuttuu, jos toisen rajoitteen resurssia kasvatetaan kolmella.** Uusi LP-malli:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max z = & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{ehdoin} & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 45 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 18+3 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 60 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Ratkaisu: Toisen rajoitteen rajoitesuora siirtyy yhden oikealle (tai ylös) . Muuttunut ongelman graafinen esitys on seuraava.

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{1. raj.} & 3x_1 + x_2 \leq 45 & \downarrow & A = (10,15) & B = (15,0) \\
\text{2. raj.} & x_1 + x_2 \leq 18 + \mathbf{3} & \downarrow & C = (\mathbf{3},18) & D = (\mathbf{21},0) \\
\text{3. raj.} & x_1 + 4x_2 \leq 60 & \downarrow & E = (0,15) & F = (20,10)
\end{array}
$$



Käypä alue laajenee ”oikeassa paikassa”. Optimi-nurkka pysyy samana, mutta nurkkapiste siirtyy. Uudet päätösmuuttujien optimiarvot ovat $x_1 = 8$, $x_2 = 13$, jolloin tavoitefunktion uusi optimiarvo on $z = 8 + 2 \cdot 13 = 34$.

---

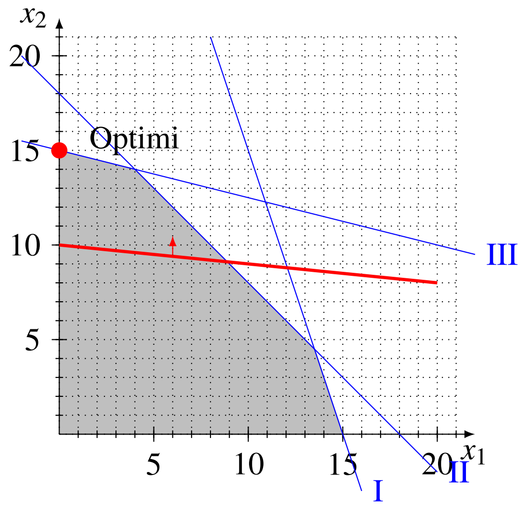
7. a) Miten paljon tulee x_1:n kertoimen c_1 kasvaa tehtävän 2 LP-mallin tavoitefunktiossa, jotta päätösmuuttujien optimiarvot muuttuvat. Miten optimi muuttuu?
b) Miten paljon tulee x_1:n kertoimen c_1 pienentyä tehtävän 2 LP-mallin tavoitefunktiossa, jotta päätösmuuttujien optimiarvot muuttuvat. Miten optimi muuttuu?

Lähtötilanne ($c_1 = 1$):

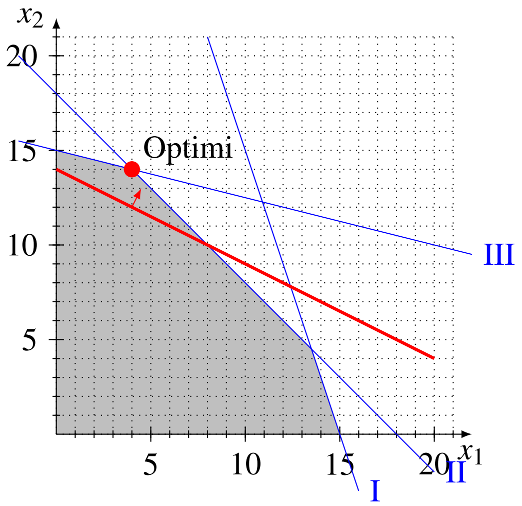
$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max z = & c_1x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{ehdoin} & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 45 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 18 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 60 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Ratkaisu: tavoitesuoran kulmakerroin on $k_{tav} = -0.5 \cdot c_1$. Lähtötilanteessa optimipiste on toisen ja kolmannen rajoitesuorien leikkauspisteessä. Toisen rajoitesuoran kulmakerroin on $k_2 = -1$ ja kolmannen rajoitesuoran kulmakerroin on $k_3 = -0.25$. Tavoitesuoran kulmakerroin lähtötilanteessa on $k_{tav} = -0.5$. Siis

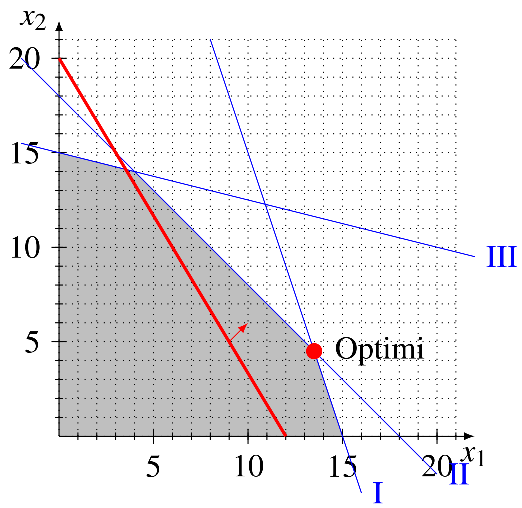
$$k_2 = -1 < k_{tav} < -0.25 = k_3.$$



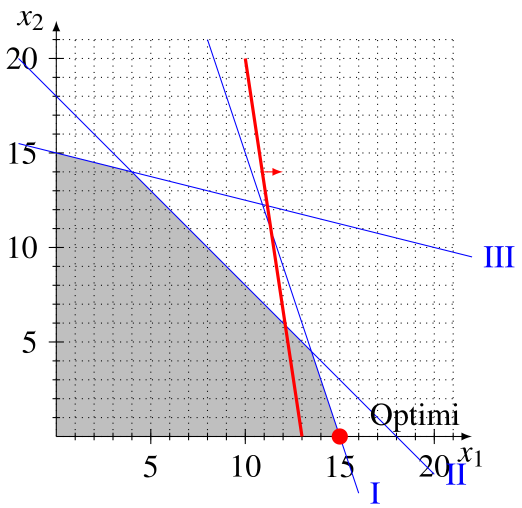
”Hyvin loiva tavoitesurora”
$-0.25 < k_{tav}$



”Loiva tavoitesuora”
$-1 < k_{tav} < -0.25$



”Jyrkkä tavoitesurora”
$-3 < k_{tav} < -1$



”Hyvin jyrkkä tavoitesuora”
$k_{tav} < -3$

Optimi-nurkka säilyy samana kuin lähtötilanteessa niin kauan kuin

$$\begin{array}{rcccc} -1 & < & k_{tav} & < & -0.25 \\ \Leftrightarrow -1 & < & -0.5 \cdot c_1 & < & -0.25 \\ \Leftrightarrow 2 & > & c_1 & < & 0.5 \end{array}$$

Huomautus: edellä todetut rajat saadaan myös seuraavasti
Millä parametrin c_1 arvolla pisteet $(0,15)$ ja $(4,14)$ ovat keskenään yhtä hyvät?

$$\begin{aligned} z(0,15) &= z(4,14) \\ \Leftrightarrow c_1 \cdot 0 + 2 \cdot 15 &= c_1 \cdot 4 + 2 \cdot 14 \\ \Leftrightarrow 30 &= 4c_1 + 28 \\ \Leftrightarrow c_1 &= 0.5 \end{aligned}$$

Millä parametrin c_1 arvolla pisteet $(4,14)$ ja $(13.5,4.5)$ ovat keskenään yhtä hyvät?

$$\begin{aligned} z(0,15) &= z(4,14) \\ \Leftrightarrow c_1 \cdot 4 + 2 \cdot 14 &= c_1 \cdot 13.5 + 2 \cdot 4.5 \\ \Leftrightarrow 4c_1 + 28 &= 13.5c_1 + 9 \\ \Leftrightarrow 9.5c_1 &= 19 \\ \Leftrightarrow c_1 &= 2 \end{aligned}$$

Vastaus: a) Jos kerroin c_1 kasvaa enemmän kuin 1:llä (uusi arvo suurempi kuin 2), niin tavoitesuorasta tulee ”jyrkkä” ja optimipiste hyppää pisteeseen $x_1 = 13.5$, $x_2 = 4.5$.
Jos kerroin c_1 kasvaa enemmän kuin 5:llä (uusi arvo suurempi kuin 6), niin tavoitesuorasta tulee ”hyvin jyrkkä” ja optimipiste hyppää pisteeseen $x_1 = 15$, $x_2 = 0$.

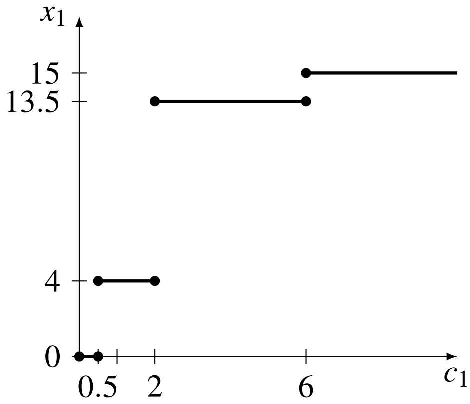
b) Jos kerroin c_1 pienenee enemmän kuin 0.5:llä (uusi arvo pienempipi kuin 0.5), niin tavoitesuorasta tulee ”hyvin loiva” ja optimipiste hyppää pisteeseen $x_1 = 0$, $x_2 = 15$.

Huomautus: Tehdään ajatusleikki: Yritys tekee tuotteita ”1” ja ”2”, ja yhden tuotteen ”1” kate c_1 paranee vähitellen. Alussa c_1 on pieni ($c_1 < 0.5$). Silloin tuotetta ”1” ei kannata valmistaa, vaan optimaalinen tapa toimia on $x_1 = 0$, $x_2 = 15$.

Edellinen optimi pysyy voimassa kunnes $c_1 > 0.5$. Tämän jälkeen tuotteen ”1” valmistaminen on kannattavaa, ja optimiksi tulee $x_1 = 4$, $x_2 = 14$.

Kun tuotteen ”1” kate edelleen paranee ei päätösmuuttujien optimiarvot muutu ennen kuin c_1 ylittää arvon $c_1 = 2$. Tämän jälkeen tuote ”1” on selvästi kannattavampi kuin tuote ”2” ja yritys siirtyy tuottamaan pääasiassa tuotetta ”1”. Uusi optimi on $x_1 = 13,5$, $x_2 = 4.5$. (Se, että tuotetta ”2” edelleen valmistetaan johtuu siitä, että näin saadaan resurssit käytettyä paremmin)

Kun tuotteen ”1” kate edelleen paranee ei päätösmuuttujien optimiarvot muutu ennen kuin c_1 ylittää arvon $c_1 = 6$. Tämän jälkeen tuotetta ”2” ei enää kannata valmistaa.



Kommentti: Tuotantomääriä ei muuteta viikottain, vaan suhteellisen harvoin strategian muuttuessa. Tämä sopii hyvin teolliseen tuotantoon. Kun tuotantokoneisto on saatu kuntoon tietyilla tuotantomäärillä, niin määriä ei mielellään muuteta.
