Vaasan yliopisto
UNIVERSITY OF VAASA

kevät 2019 / orms.1030

Talousmatematiikan perusteet

9. harjoitus, viikko 12 (18.03.–22.03.2019)

L	Ma	10–12	A202	R05	Ti	14–16	F453
R01	Ma	12–14	F453	L	To	08–10	A202
R02	Ma	16–18	F453	R06	Pe	12–14	F140
R03	Ti	08–10	F425	R07	Pe	08–10	F453
R04	Ti	12–14	F453	R08	Pe	10–12	F453

Olkoon

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)
a) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, b) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$, c) $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$
Ratkaisu:

a) $$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$ ei voi laskea, koska matriisit ovat eri kokoisia.

c) $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ ei voi laskea, koska matriisit ovat eri kokoisia.

---

2. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määriteltyjä!)
a) $\boldsymbol{AB}$, b) $\boldsymbol{BA}$, c) $\boldsymbol{AC}$, d) $\boldsymbol{CA}$, e) $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}$
Ratkaisu:

a) $$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $$\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 6 & 9 & -2 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $$\boldsymbol{AC} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $\boldsymbol{CA}$ C on 3x2 ja A on 3x3, ei voi laskea, koska $\boldsymbol{C}$:n rivi ja $\boldsymbol{A}$:n sarake ovat eri mittaiset

e) $$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -13 & 3 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Tuotteiden A, B ja C sisäänostohinnat ovat

tuote	A	B	C
hinta	2.50	0.50	1.00

Sijoitetaan vastaavat luvut matriisiin (hintavektori)

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Yritykse kolme osastoa: myyntiosasto (M-os), valmistusosasto (V-os), suunnitteluosasto (S-os) ja Helsingin toimisto (H-to) ostavat tammikuussa tuotteita A, B ja C seuraavan taulukon mukaiset määrät

tuote	A	B	C
M-os	20	30	0
V-os	10	50	20
S-os	0	10	40
H-to	30	10	10

Sijoitetaan nämäkin luvut matriisiin (ostomatriisi)

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

a) Laske matriisilauseke $\boldsymbol{pD}^T$. (Mitä edellä saadun vektorin koordinaatit merkitsevät?)
b) Onko lauseke $\boldsymbol{pD}$ järkevä (mikä sen arvo on)?
c) Onko lauseke $\boldsymbol{Dp}^T$ järkevä (mikä sen arvo on)?
d) Onko lauseke $\boldsymbol{Dp}$ järkevä (mikä sen arvo on)?

Ratkaisu:

$$\text{a)} \quad \boldsymbol{pD}^T = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 & 30 \\ 30 & 50 & 10 & 10 \\ 0 & 20 & 40 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 & 70 & 45 & 90 \end{pmatrix}$$

- 65 = A:n hinta kertaa M-osaston ostamien A-tuotteiden määrä + B:n hinta kertaa M-osaston ostamien B-tuotteiden määrä + C:n hinta kertaa M-osaston ostamien C-tuotteiden määrä
  = M-osaston ostojen arvo

- 70 = A:n hinta kertaa V-osaston ostamien A-tuotteiden määrä + B:n hinta kertaa Vosaston ostamien B-tuotteiden määrä + C:n hinta kertaa V-osaston ostamien C-tuotteiden määrä
  = V-osaston ostojen arvo

- 45 = A:n hinta kertaa S-osaston ostamien A-tuotteiden määrä + B:n hinta kertaa S-osaston ostamien B-tuotteiden määrä + C:n hinta kertaa S-osaston ostamien C-tuotteiden määrä
  = S-osaston ostojen arvo

- 90 = A:n hinta kertaa H-toimiston ostamien A-tuotteiden määrä + B:n hinta kertaa H-toimiston ostamien B-tuotteiden määrä + C:n hinta kertaa H-toimiston ostamien C-tuotteiden määrä
  = H-toimiston ostojen arvo

$$\text{b)} \quad \boldsymbol{pD} = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{ei voi laskea}$$

$$\text{c)} \quad \boldsymbol{Dp}^T = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0.5 \\ 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 70 \\ 45 \\ 90 \end{pmatrix}$$

$$\text{d)} \quad \boldsymbol{Dp} = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} \quad \text{ei voi laskea}$$

Vastaus: a-kohdassa laskun tulos kertoo ostojen yhteisarvot osastoittain,
c-kohdassa tulkinta on sama, mutta esitys on tiiviimpi ja helpompi lukea,
b-kohdassa yritetään laske 1×3 matriisin ja 4×3 matriisien tuloa, mikä on mahdotonta,
d-kohdassa yritetään laske 4×3 matriisin ja 1×3 matriisien tuloa, mikä on mahdotonta.

---

4. Määritä käänteismatriisi matriisille

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu:
Tehdään ratkaisu rivioperaatioilla

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{vaihdetaan rivit}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{|c|} *(-2) \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \text{lisää rivi 1 } (-2)\text{:lla kerrottuna} \\ \text{riviin 2} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c|} \leftarrow + & \\ *(1) & *(-1) \end{array} \begin{array}{l} \text{lisää rivi 2 riviin 1} \\ \text{lopuksi vaihda rivin 1 merkit} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

siis **A**:n käänteismatriisi on $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

---

5. Määritä rivioperaatioiden avulla käänteismatriisi matriisille

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} [1] & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c} \cdot(-1) & \cdot(-2) \\ + & \\ & + \end{array}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & [1] & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c} + & \\ \cdot(1) & \cdot(-5) \\ & + \end{array}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & [1] & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c|c} + & & \\ & + & \\ \cdot(1/2) & \cdot(-1/2) & \cdot(1/2) \end{array}$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1.5 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & -2.5 & 3.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & -2.5 & 0.5 \end{array}\right)$$

Siis

$$\boldsymbol{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & -1.5 & 0.5 \\ -2.5 & 3.5 & -0.5 \\ 1.5 & -2.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

---

6. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x - z = 4 \\ 2x + 3y + 3z = 8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(Vihje: Voit soveltaa periaatetta $\boldsymbol{N}\vec{x} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \boldsymbol{N}^{-1}\vec{b}$. Huomaa, että kerroinmatriisin käänteismatriisi laskettiin edellisessä tehtävässä!)

Ratkaisu: Yhtälöryhmän kerroinmatriisin käänteismatriisi laskettiin edellisessä tehtävässä:

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & -1.5 & 0.5 \\ -2.5 & 3.5 & -0.5 \\ 1.5 & -2.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{N} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{N}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & -1.5 & 0.5 \\ -2.5 & 3.5 & -0.5 \\ 1.5 & -2.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tarkistetaan tulos sijoittamalla saadut muuttujien arvot alkuperäiseen yhtälöön

$$\begin{cases} -2 & - & 10 & - & 2\cdot(-6) & = & 0 & \text{Ok} \\ -2 & & & - & (-6) & = & 4 & \text{Ok} \\ 2\cdot(-2) & + & 3\cdot 10 & + & 3\cdot(-6) & = & 8 & \text{Ok} \end{cases}$$

Vastaus: $x = -2$, $y = 10$, $z = -6$.

---

7. Miten edellisen tehtävän yhtälöryhmän ratkaisu muuttuu, jos kolmannen yhtälön oikea puoli kasvaa yhdellä (arvosta 8 arvoon 9)?

Ratkaisu: Vertaamme nyt kahta (eri) yhtälöryhmän ratkaisua keskenään.
$\vec{x}^{alkup}$ on yhtälöryhmän

$$\boldsymbol{N}\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ratkaisu ja $\vec{x}^{uusi}$ on yhtälöryhmän

$$\boldsymbol{N}\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

ratkaisu. Muutos ratkaisussa on

$$\begin{aligned} \Delta\vec{x} = \vec{x}^{uusi} - \vec{x}^{alkup} &= \boldsymbol{N}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} - \boldsymbol{N}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \boldsymbol{N}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \begin{pmatrix} 1.5 & -1.5 & 0.5 \\ -2.5 & 3.5 & -0.5 \\ 1.5 & -2.5 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nyt kun RHS-vektorin kolmas koordinaatti muuttu yhdellä, muutosvektori $\Delta\vec{x}$ on yhtälöryhmän kerroinmatriisin käänteismatriisin $\boldsymbol{N}^{-1}$ kolmas sarake.

Käänteismatriisi koetaan usein työläänä ja epämiellyttävän raskaana laskea. Toisaalta 'tuotevalinta'-ongelman LP-mallia ratkaistaessa RHS-vektorissa ovat tyypillisesti yrityksen resurssit. Yritystä silloin usein kiinnostaa tietää miten päätösmuuttujien arvot optimissa muuttuvat, jos jotakin resurssia saadaan hankittua yksi yksikkö lisää. Vastaus luuraa käänteismatriisin sarakkeessa. Tässä tapauksessa käänteismatriisi sisältää suoraa rahan arvoista tietoa!
Uusi ratkaisu on siis

$$\vec{x}^{uusi} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 9.5 \\ -5.5 \end{pmatrix}$$
