Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030 Opettaja: Matti Laaksonen

A

1. välikoe perjantai 15.2.2019
Ratkaise 3 tehtävää. Kun teet tehtävän, käsittele kaikki sen alakohdat.
Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja.

A1. Erään raaka-aineen kysyntä on 2000 kg/vuosi. Tilauskustannus on 30,00 €/tilaus ja varaston yksikköylläpitokustannus on 0.25 €/kg/kuukausi.

a) (2p) Mikä on optimaalinen tilauserän koko?
b) (2p) Mitkä ovat varastonhoidon kokonaiskustannukset vuodessa, kun tilauserä on optimaalinen?
c) (2p) Miten monta prosenttia kokonaiskustannus nousee optimiarvosta, jos tilauserää kasvatetaan optimiarvosta 20,0%.

Ratkaisu:

$$\begin{aligned} D &= 2000\text{kg/vuosi} \\ K &= 30€ \\ h &= 0.25€/\text{kg/kk} = 3€/\text{kg/vuosi} \end{aligned}$$

a) Optimaalinen tilauserä on

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30€ \cdot 2000\text{kg/vuosi}}{3€/\text{kg/vuosi}}} = 200.00\,\text{kg} \approx 200\,\text{kg}$$

b) Toimittaessa optimaalisesti kokonaiskustannus on

$$\begin{aligned} TC_0 = TC(q_0) &= \frac{KD}{q_0} + h \cdot \frac{q_0}{2} \\ &= \frac{30€ \cdot 2000\text{kg/vuosi}}{200\,\text{kg}} + 3€/\text{kg/vuosi} \cdot \frac{200\,\text{kg}}{2} \\ &= 300€/\text{vuosi} + 300€/\text{vuosi} = 600.00€/\text{vuosi} \end{aligned}$$

c) Uusi tilauserä on $q_2 = (1 + 20/100) * 200\,\text{kg} = 240\,\text{kg}$.
Tilattaessa 240 kg:n erissä, kokonaiskustannus on

$$\begin{aligned} TC_2 = TC(q_2) &= \frac{KD}{q_2} + h \cdot \frac{q_2}{2} \\ &= \frac{30€ \cdot 2000\text{kg/vuosi}}{240\,\text{kg}} + 3€/\text{kg/vuosi} \cdot \frac{240\,\text{kg}}{2} \\ &= 250€/\text{vuosi} + 360€/\text{vuosi} \\ &= 610.00€/\text{vuosi} \end{aligned}$$

Kokonaiskustannus kasvaa siis $(610.00 - 600.00)€/\text{vuosi} = 10.0€/\text{vuosi}(\text{eli}1.7\%)$

Vastaus: a) $q_0 = 200\,\text{kg}$ b) $TC_0 = 600.00€/\text{vuosi}$
c) kokonaiskustannus muuttuu 10.0€/vuosi (eli 1.7%)

A2. a) (2p) Mikä on kuukausijakson korkokanta, kun todellinen vuosikorko on 4,15%?
b) (2p) Mikä on todellinen vuosikorko, jos kuukausijakson korkokanta on 0,005849741?
c) (2p) Laske tasaerälainan annuiteetti, kun laina-aika on 30 kuukautta, lainan määrä on 3000€, laina hoidetaan kuukausittain ja lainaan liittyvä todellinen vuosikorko on 4,15%.

Ratkaisu: a)

$$\begin{aligned}(1+i_{kk})^{12} &= (1+i_{tod}) = 1.0415\\ \Leftrightarrow (1+i_{kk}) &= 1.0415^{1/12}\\ &= 1.00339424593\end{aligned}$$

Siis $i_{kk} = 0.00339424593$

b)

$$(1+i_{tod}) = (1+i_{kk})^{12} = 1.00584974100^{12} = 1.07250000061$$

Siis todellinen vuosikorko on 7.25%.

c) Lasketaan kuukausi-jaksotuksen korkokanta

$$(1+i_{tod}) = 0.0415 \Rightarrow \begin{cases} (1+i) &= 0.0415^{1/12}\\ i &= 0.0415^{1/12}-1\end{cases}$$

Lainan tasaerä on

$$\begin{aligned}k &= \frac{i\cdot(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\cdot K_0\\ &= \frac{(1.0415^{1/12}-1)\cdot 1.0415^{30/12}}{1.0415^{30/12}-1}\cdot 3000€\\ &= 105.3472€ \approx 105.35€\end{aligned}$$

Tarkistus:

$$30\cdot 105.3472€ = 3160.50 > 3000€ \quad \text{OK}$$

Vastaus: a) $i_{kk} = 0.00339424593$ b) todellinen vuosikorko on 7.25% c) kuukausittainen osamaksuerä on 105.35€/kk

---

A3. a) (2p) Miten ääritellään projektin sisäinen korkokanta? Mitä hyviä ja mitä huonoja ominaisuuksia sisäisessä korkokannassa on?
b) (1p) Jos projektin NettoNykyArvo on positiivinen 8,00% (p.a.) laskentakorolla, Mitä pystyt sanomaan projektin sisäisestä korkokannasta (perustele vastaus)?
c) (3p) Laske nettonykyarvo 12,00%:n p.a. laskentakorolla projektille, jonka kuukausijaksotettu nettokassavirta on seuraavan taulukon mukainen.

kk	netto-kassaerä €
0	-1000
1	+300
2	+300
3	+300
4	+300

Ratkaisu: a) Sisäinen korkokanta on se laskentakorko, jolla nettonykyarvo saa arvon nolla euroa. Sisäinen korkokanta kuvaa projektin kykyä tuottaa uutta pääomaa. Sisäinen korkokanta ei suosi isoja projekteja. Jos projektin synnyttämän nettokassavirran alussa olevien negatiivisen tuloksen antavien jaksojen jälkeen loput jaksot antavat positiivisen netto tuloksen sanomme, että projekti on ”normaali”. Normaalilla projektilla on aina sisäinen korkokanta. Jos projektin nettokassavirta ei ole normaali, vaan se vaihtaa suuntaa kaksi kertaa (”– + –” tai ”+ – +”), niin sisäistä korkokantaa ei välttämättä ole olemassa. Tätä varten tulee olla käytettävissä myös muita mittareita.

b) Jos nettonykyarvo on positiivinen 8,00% laskentakorolla (p.a.) ja projekti on normaali, niin projektin sisäinen korkokanta on suurempi kuin laskentakorko 8,00% (p.a.).
c)

$$
\begin{aligned}
NPV &= -H + \sum_{n=1}^{4} \frac{k_n}{(1+i)^n} \\
&= -1000€ + \sum_{n=1}^{4} \frac{300€}{1.12^{n/12}} \\
&= -1000€ + \frac{300€}{1.12^{1/12}} \cdot \frac{1-\left(1.12^{-1/12}\right)^4}{1-1.12^{-1/12}} \\
&= 172.07€
\end{aligned}
$$

A4. a) (2p) Määrittele lyhyesti sanallisesti y:n jousto x:n suhteen.
b) (2p) Tuotteen hinta on nyt 12.50€ ja kysyntä 2 800 tuotetta kuukaudessa. Jos tuotteen hintaa nostetaan 0.50€, niin kysynnän arvellaan vähenevän 12.0%. Mikä on tuotteen kysynnän hintajousto?
c) (2p) Miten tuotto muuttui, kun hintaa muutettiin? Voiko tällä perusteella ratkaista, onko hinnan muutos kannattava?

Ratkaisu: a) y:n jousto x:n suhteen on y:n prosenttimuutos jaettuna x:n prosenttimuutoksella.
b)

$$\begin{aligned} q &= 2800.00\text{kpl/kk} \\ p &= 12.50€/\text{kpl} \\ dq &= \frac{-12.0}{100} \cdot 2800.00\text{kpl/kk} = -336\text{kpl/kk} \\ dp &= 0.50€/\text{kpl} \end{aligned}$$

$$khj = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{-336\text{kpl/kk}}{0.50€/\text{kpl}} \cdot \frac{12.50€/\text{kpl}}{2800.00\text{kpl/kk}} = -3.0$$

c) Tuotto ennen hinnan muutosta

$$R_0 = q_0 \cdot p_0 = 2800.00\text{kpl/kk} \cdot 12.50€/\text{kpl} = 35000.00€/\text{kk}$$

Tuotto hinnan muutoksen jälkeen

$$R_1 = q_1 \cdot p_1 = 2464.00\text{kpl/kk} \cdot 13.00€/\text{kpl} = 32032.00€/\text{kk}$$

Tuotto muutui määrän

$$R_1 - R_0 = 32032.00€/\text{kk} - 35000.00€/\text{kk} = -2968.00€/\text{kk}$$

Kysyntä siis pieneni. Myös kustannukset pienenivät, mutta emme näillä tiedoilla pysty vertaamaan tuoton muutosta ja kustannusten muutosta. Hinnan muutoksen kannattavuutta emme siis pysty nyt tutkimaan.

Vastaus: b) kysynnän hintajousto on -3.0, tuotto laski 2968.00€/kk (eli 8.48%) Hinnan alennuksen kannattavuuteen emme voi näillä tiedoilla ottaa kantaa.

Kaavoja:

$$\frac{d}{dx}ax^n = n \cdot ax^{n-1}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Varastomallit:

perusmalli $\quad q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$

puutemalli $\quad q_1 = q_0\sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0\sqrt{\frac{s}{h+s}},$

$$TC_1(q) = \frac{KD}{q} + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q}$$

Korkolasku:

yksinkertainen korkolasku:

$$K_t = (1+it)K_0 = (1 + \frac{p}{100}t)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

koronkorkolasku:

$$K_t = (1+i)^t K_0, \text{ kun } t = 1,2,3,\ldots$$

jatkuva korkolasku:

$$K_t = (1+i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1+i) = e^{\rho}$$

Jaksolliset suoritukset

prolongointitekijä $s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

diskonttaustekijä $a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$

kuoletuskerroin $c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

annuiteetti: $k = c_{n,i}K_0$ $\qquad$ osamaksuerä: $k = c_{n,i}(H - h + m)$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Kysynnän hinta jousto

$$\text{kysynnän hintajousto} = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q}$$

Rajatuotto ja kysynnän hinta jousto

$$MR = p \cdot (1 + \frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}})$$