



# Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030 Opettaja: Matti Laaksonen

**B**

## 1. välikoe perjantai 15.2.2019

**Ratkaise 3 tehtävää. Kun teet tehtävän, käsittele kaikki sen alakohdat.**

Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja.

**B1.** Erään raaka-aineen kysyntä on 4000 kg/vuosi. Tilauskustannus on 60,00 euro/tilaus ja varaston yksikköylläpitokustannus on 0.25 €/kg/kuukausi.

- (2p) Mikä on optimaalinen tilauserän koko?
- (2p) Mitkä ovat varastonhoidon kokonaiskustannukset vuodessa, kun tilauserä on optimaalinen?
- (2p) Miten monta prosenttia kokonaiskustannus nousee optimiarvosta, jos tilauserää kasvatetaan optimiarvosta 50,0%.

*Ratkaisu:*

$$D = 4000\text{kg/vuosi}$$

$$K = 60\text{€}$$

$$h = 0.25\text{€/kg/kk} = 3\text{€/kg/vuosi}$$

a) Optimaalinen tilauserä on

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 60\text{€} \cdot 4000\text{kg/vuosi}}{3\text{€/kg/vuosi}}} = 400.00\text{kg} \approx 400\text{kg}$$

b) Toimittaessa optimaalisesti kokonaiskustannus on

$$\begin{aligned} TC_0 = TC(q_0) &= \frac{KD}{q_0} + h \cdot \frac{q_0}{2} \\ &= \frac{60\text{€} \cdot 4000\text{kg/vuosi}}{400\text{kg}} + 3\text{€/kg/vuosi} \cdot \frac{400\text{kg}}{2} \\ &= 600\text{€/vuosi} + 600\text{€/vuosi} = 1200.00\text{€/vuosi} \end{aligned}$$

c) Uusi tilauserä on  $q_2 = (1 + 50/100) \cdot 400\text{kg} = 600\text{kg}$ .

Tilattaessa 600kg:n erissä, kokonaiskustannus on

$$\begin{aligned} TC_2 = TC(q_2) &= \frac{KD}{q_2} + h \cdot \frac{q_2}{2} \\ &= \frac{60\text{€} \cdot 4000\text{kg/vuosi}}{600\text{kg}} + 3\text{€/kg/vuosi} \cdot \frac{600\text{kg}}{2} \\ &= 400\text{€/vuosi} + 900\text{€/vuosi} \\ &= 1300.00\text{€/vuosi} \end{aligned}$$

Kokonaiskustannus kasvaa siis  $(1300.00 - 1200.00)\text{€/vuosi} = 100.0\text{€/vuosi}$  (eli 8.3%)

**Vastaus:** a)  $q_0 = 400\text{kg}$    b)  $TC_0 = 1200.00\text{€/vuosi}$

c) kokonaiskustannus muuttuu  $100.0\text{€/vuosi}$  (eli 8.3%)

- B2.** a) (2p) Mikä on kuukausijakson korkokanta, kun todellinen vuosikorko on 3,25%?  
 b) (2p) Mikä on todellinen vuosikorko, jos kuukausijakson korkokanta on 0.0033942459?  
 c) (2p) Laske tasaerälainan annuiteetti, kun laina-aika on 24 kuukautta, lainan määrä on 3500€, laina hoidetaan kuukausittain ja lainaan liittyvä todellinen vuosikorko on 3,25%.

Ratkaisu: a)

$$\begin{aligned}(1 + i_{kk})^{12} &= (1 + i_{tod}) = 1.0325 \\ \Leftrightarrow (1 + i_{kk}) &= 1.0325^{1/12} \\ &= 1.00266880877\end{aligned}$$

Siis  $i_{kk} = 0.00266880877$

b)

$$(1 + i_{tod}) = (1 + i_{kk})^{12} = 1.0033942459^{12} = 1.04149999966$$

Siis todellinen vuosikorko on 4.15%.

c) Lasketaan kuukausi-jaksotuksen korkokanta

$$(1 + i_{tod}) = 1.0325 \Rightarrow \begin{cases} (1 + i) = 1.0325^{1/12} \\ i = 1.0325^{1/12} - 1 \end{cases}$$

Lainan tasaerä on

$$\begin{aligned}k &= \frac{i \cdot (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \cdot K_0 \\ &= \frac{(1.0325^{1/12} - 1) \cdot 1.0325^{24/12}}{1.0325^{24/12} - 1} \cdot 3500\text{€} \\ &= 150.7481\text{€} \approx 150.75\text{€}\end{aligned}$$

Tarkistus:

$$24 \cdot 150.7481\text{€} = 3618.00 > 3500\text{€} \quad \text{OK}$$

**Vastaus:** a)  $i_{kk} = 0.00266880877$  b) todellinen vuosikorko on 4.15% c) kuukausittainen osamaksuerä on 150.75€/kk

---

- B3.** a) (2p) Miten ääritellään projektin sisäinen korkokanta? Mitä hyviä ja mitä huonoja ominaisuuksia sisäisessä korkokannassa on?
- b) (1p) Jos projektin NettoNykyArvo on positiivinen 8,00% (p.a.) laskentakorolla, Mitä pysyt sanomaan projektin sisäisestä korkokannasta (perustele vastaus)?
- c) (3p) Laske nettonykyarvo 11,00%:n p.a. laskentakorolla projektille, jonka kuukausijakotettu nettokassavirta on seuraavan taulukon mukainen.

kk	netto- kassaerä €
0	-1100
1	+300
2	+300
3	+300
4	+300

*Ratkaisu:* a) Sisäinen korkokanta on se laskentakorko, jolla nettonykyarvo saa arvon nolla euroa. Sisäinen korkokanta kuvaa projektin kykyä tuottaa uutta pääomaa. Sisäinen korkokanta ei suosi isoja projekteja. Jos projektin synnyttämän nettokassavirran alussa olevien negatiivisen tuloksen antavien jaksojen jälkeen loput jaksot antavat positiivisen netto tuloksen sanomme, että projekti on ”normaali”. Normaalilla projektilla on aina sisäinen korkokanta. Jos projektin nettokassavirta ei ole normaali, vaan se vaihtaa suuntaa kaksi kertaa (”- + -” tai ”+ - +”), niin sisäistä korkokantaa ei välttämättä ole olemassa. Tätä varten tulee olla käytettävissä myös muita mittareita.

- b) Jos nettonykyarvo on positiivinen 8,00% laskentakorolla (p.a.) ja projekti on normaali, niin projektin sisäinen korkokanta on suurempi kuin laskentakorko 8,00% (p.a.).
- c)

$$\begin{aligned}
 NPV &= -H + \sum_{n=1}^4 \frac{k_n}{(1+i)^n} \\
 &= -1100\text{€} + \sum_{n=1}^4 \frac{300\text{€}}{1.11^{n/12}} \\
 &= -1100\text{€} + \frac{300\text{€}}{1.11^{1/12}} \cdot \frac{1 - (1.11^{-1/12})^4}{1 - 1.11^{-1/12}} \\
 &= 74.25\text{€}
 \end{aligned}$$


---

**B4.** a) (2p) Määrittele lyhyesti sanallisesti  $y$ :n jousto  $x$ :n suhteen.

b) (2p) Tuotteen hinta on nyt 12.50€ ja kysyntä 2 800 tuotetta kuukaudessa. Jos tuotteen hintaa nostetaan 0.50€, niin kysynnän arvellaan vähenevän 12.0%. Mikä on tuotteen kysynnän hintajousto?

c) (2p) Miten tuotto muuttui, kun hintaa muutettiin? Voiko tällä perusteella ratkaista, onko hinnan muutos kannattava?

*Ratkaisu:* a)  $y$ :n jousto  $x$ :n suhteen on  $y$ :n prosenttimuutos jaettuna  $x$ :n prosenttimuutoksella.

b)

$$\begin{aligned}q &= 2800.00\text{kpl/kk} \\p &= 12.50\text{€/kpl} \\dq &= \frac{-12.0}{100} \cdot 2800.00\text{kpl/kk} = -336\text{kpl/kk} \\dp &= 0.50\text{€/kpl}\end{aligned}$$

$$khj = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{-336\text{kpl/kk}}{0.50\text{€/kpl}} \cdot \frac{12.50\text{€/kpl}}{2800.00\text{kpl/kk}} = -3.0$$

c) Tuotto ennen hinnan muutosta

$$R_0 = q_0 \cdot p_0 = 2800.00\text{kpl/kk} \cdot 12.50\text{€/kpl} = 35000.00\text{€/kk}$$

Tuotto hinnan muutoksen jälkeen

$$R_1 = q_1 \cdot p_1 = 2464.00\text{kpl/kk} \cdot 13.00\text{€/kpl} = 32032.00\text{€/kk}$$

Tuotto muuttui määrän

$$R_1 - R_0 = 32032.00\text{€/kk} - 35000.00\text{€/kk} = -2968.00\text{€/kk}$$

Kysyntä siis pieneni. Myös kustannukset pienenivät, mutta emme näillä tiedoilla pysty vertaamaan tuoton muutosta ja kustannusten muutosta. Hinnan muutoksen kannattavuutta emme siis pysty nyt tutkimaan.

**Vastaus:** b) kysynnän hintajousto on -3.0, tuotto laski 2968.00€/kk (eli 8.48%) Hinnan alennuksen kannattavuuteen emme voi näillä tiedoilla ottaa kantaa.

---

## Kaavoja:

$$\frac{d}{dx}ax^n = n \cdot ax^{n-1}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

## Varastomallit:

$$\text{perusmalli} \quad q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

$$\text{puutemalli} \quad q_1 = q_0 \sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0 \sqrt{\frac{s}{h+s}},$$

$$TC_1(q) = \frac{KD}{q} + \frac{M^2h}{2q} + \frac{(q-M)^2s}{2q}$$

## Korkolasku:

yksinkertainen korkolasku:

$$K_t = (1 + it)K_0 = \left(1 + \frac{p}{100}t\right)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

koronkorkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0, \text{ kun } t = 1, 2, 3, \dots$$

jatkuva korkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0 = e^{pt} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1 + i) = e^p$$

## Jaksolliset suoritukset

$$\text{prolongointitekijä } s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\text{diskonttaustekijä } a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$\text{kuoletuskerroin } c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

## Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\text{annuiteetti: } k = c_{n,i}K_0 \quad \text{osamaksuerä: } k = c_{n,i}(H - h + m)$$

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

## Kysynnän hintajousto

$$\text{kysynnän hintajousto} = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q}$$

## Rajatuotto ja kysynnän hinta jousto

$$MR = p \cdot \left(1 + \frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}}\right)$$