Vaasan yliopisto
UNIVERSITY OF VAASA

kevät 2019

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030 Opettaja: Matti Laaksonen

G

1. välikoe keskiviikkona 20.2.2019
Ratkaise 3 tehtävää. Kun teet tehtävän, käsittele kaikki sen alakohdat.
Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja.

G1. a) (2p) Mikä on kuukausijakson korkokanta, kun todellinen vuosikorko on 3,75%?
b) (2p) Mikä on todellinen vuosikorko, jos kuukausijakson korkokanta on 0.00283051655?
c) (2p) Laske osamaksuerä, kun käteishinta on 25000€, käsiraha on 5000€, osamaksulisä on 700. Osamaksuerät maksetaan kuukausittain. Maksuaika on 15 kuukautta ja todellinen vuosikorko on 3,75%.

Ratkaisu: a)

$$\begin{aligned}(1+i_{kk})^{12} &= (1+i_{tod}) = 1.0375\\ \Leftrightarrow (1+i_{kk}) &= 1.0375^{1/12}\\ &= 1.00307254170\end{aligned}$$

Siis $i_{kk} = 0.00307254170$

b)

$$(1+i_{tod}) = (1+i_{kk})^{12} = 1.00283051655^{12} = 1.03449999997$$

Siis todellinen vuosikorko on 3.45%.

c) Lasketaan kuukausi-jaksotuksen korkokanta

$$(1+i_{tod}) = 0.0375 \Rightarrow \begin{cases} (1+i) &= 0.0375^{1/12}\\ i &= 0.0375^{1/12}-1\end{cases}$$

Osamaksuerä on

$$\begin{aligned}k &= \frac{i\cdot(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\cdot(H-h+m)\\ &= \frac{(1.0375^{1/12}-1)\cdot 1.0375^{15/12}}{1.0375^{15/12}-1}\cdot(25000€-5000€+700€)\\ &= 1414.1637€ \approx 1414.16€\end{aligned}$$

Tarkistus:

$$15\cdot 1414.1637€ = 21212.40 > 25000€ - 5000€ + 700€ \quad \text{OK}$$

Vastaus: a) $i_{kk} = 0.00307254170$ b) todellinen vuosikorko on 3.45%   c) kuukausittainen osamaksuerä on 1414.16€/kk

---

G2. a) (2p) Miten ääritellään projektin sisäinen korkokanta? Mitä hyviä ja mitä huonoja ominaisuuksia sisäisessä korkokannassa on?
b) (1p) Jos projektin NettoNykyArvo on positiivinen 8,00% (p.a.) laskentakorolla, Mitä pystyt sanomaan projektin sisäisestä korkokannasta (perustele vastaus)?
c) (3p) Laske nettonykyarvo 10,00%:n p.a. laskentakorolla projektille, jonka kuukausijaksotettu nettokassavirta on seuraavan taulukon mukainen.

kk	netto-kassaerä €
0	-1500
1	+400
2	+400
3	+400
4	+400

Ratkaisu: a) Sisäinen korkokanta on se laskentakorko, jolla nettonykyarvo saa arvon nolla euroa. Sisäinen korkokanta kuvaa projektin kykyä tuottaa uutta pääomaa. Sisäinen korkokanta ei suosi isoja projekteja. Jos projektin synnyttämän nettokassavirran alussa olevien negatiivisen tuloksen antavien jaksojen jälkeen loput jaksot antavat positiivisen netto tuloksen sanomme, että projekti on ”normaali”. Normaalilla projektilla on aina sisäinen korkokanta. Jos projektin nettokassavirta ei ole normaali, vaan se vaihtaa suuntaa kaksi kertaa (”− + −” tai ”+ − +”), niin sisäistä korkokantaa ei välttämättä ole olemassa. Tätä varten tulee olla käytettävissä myös muita mittareita.

b) Jos nettonykyarvo on positiivinen 8,00% laskentakorolla (p.a.) ja projekti on normaali, niin projektin sisäinen korkokanta on suurempi kuin laskentakorko 8,00% (p.a.).
c)

$$
\begin{aligned}
NPV &= -H + \sum_{n=1}^{4} \frac{k_n}{(1+i)^n} \\
&= -1500€ + \sum_{n=1}^{4} \frac{400€}{1.10^{n/12}} \\
&= -1500€ + \frac{400€}{1.10^{1/12}} \cdot \frac{1-\left(1.10^{-1/12}\right)^4}{1-1.10^{-1/12}} \\
&= 68.61€
\end{aligned}
$$

G3. a) (2p) Määrittele lyhyesti sanallisesti y:n jousto x:n suhteen.
b) (2p) Tuotteen kysynnän hintajousto on $-1{,}90$. Tuotteen hinta on nyt 14,00€/kpl ja sen kysyntä on 1 400 tuotetta kuukaudessa. Yritys harkitsee hinnan laskemista eurolla. Miten muuttuu tuotteen kysyntä, jos tuotteen hintaa lasketaan yhdellä eurolla?
c) (2p) Kannattaako b-kohdassa suunniteltu hinnan alennus, jos tuotteen rajakustannus on 4,5€/kpl?

Ratkaisu: a) y:n jousto x:n suhteen on y:n prosenttimuutos jaettuna x:n prosenttimuutoksella.
b)

$$\begin{array}{ll} \text{hinta nyt} & p = 14.00\text{€/kpl} \\ \text{kysyntä nyt} & q = 1400.00\text{kpl/kk} \\ \text{hinnan muutos} & \Delta p = -1.00\text{€/kpl} \\ \text{kysynnän muutos} & \Delta q = x \\ \text{kysynnän hintajousto} & khj = -1.90 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} &= khj \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta q}{-1.00\text{€/kpl}} \cdot \frac{14.00\text{€/kpl}}{1400.00\text{kpl/kk}} &= -1.90 \\ \Leftrightarrow \Delta q &= \frac{-1.90 \cdot (-1.00\text{€/kpl}) \cdot 1400.00\text{kpl/kk}}{14.00\text{€/kpl}} \\ \Leftrightarrow \Delta q &= 190.0\text{kpl/kk} \end{aligned}$$

Siis muutos kysynnässä on 190.0kpl/kk eli 13.57%.

c) Hinnan alentaminen lisäsi kysyntää ja siis valmistusmäärää. Tutkitaan tämän kannattavuus vertaamalla rajatuottoa MR ja rajakustannuksia $MC = 4.50$€/kpl

- jos $MR > MC$, niin hinnan alentamisen aikaan saama tuotannon lisäys kannattaa
- jos $MC > MR$, niin hinnan alentamisen aikaan saama tuotannon lisäys ei kannata

$$\begin{aligned} MR &= p\left(1 + \frac{1}{khj}\right) \\ &= 14.00\text{€/kpl}\left(1 + \frac{1}{-1.90}\right) \\ &= 6.63\text{€/kpl} \end{aligned}$$

Nyt Nyt $MR > MC$, joten hinnan alentaminen kannatti.

G4. Maatalousyrittäjä kasvattaa marjoja kasvihuoneessa. Marjat myydään tuoreina kuluttajille. Hinta määräytyy kunkin viikon tuotantomäärästä. Kun viikon tuotantomäärä oli 520 kg/vko, niin hinta asettui tasolle 15,00 €/kg. Kun viikon tuotantomäärä oli 300 kg/vko, niin hinta asettui tasolle 17,00 €/kg. Määritä interpoloimalla se kysyntä funktio $p = p(q)$, jota yrittäjän kannattaa käyttää toimintansa suunnittelussa.

Ratkaisu:

$$
\begin{aligned}
q_1 &= 300\,\text{kg/vko} \\
p_1 &= 17{,}00\,\text{€/kg} \\
q_2 &= 520\,\text{kg/vko} \\
p_2 &= 15{,}00\,\text{€/kg}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(q) &\approx p_1 + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}(q - q_1) \\
&= 17{,}00 + \frac{15 - 17}{520 - 300}(q - 300) \\
&= 17{,}00 + \frac{-2}{220}(q - 300) \\
&= 17{,}00 - 0.009091 \cdot q + 2.73 \\
&= 19{,}73 - 0.009091 \cdot q
\end{aligned}
$$

Vastaus: $p = 19{,}73 - 0{,}0091 \cdot q$.

Kaavoja:

$$\frac{d}{dx}ax^n = n \cdot ax^{n-1}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

Varastomallit:

$$\text{perusmalli} \quad q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

$$\text{puutemalli} \quad q_1 = q_0\sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0\sqrt{\frac{s}{h+s}},$$

$$TC_1(q) = \frac{KD}{q} + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q}$$

Korkolasku:

yksinkertainen korkolasku:

$$K_t = (1 + it)K_0 = (1 + \frac{p}{100}t)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

koronkorkolasku:

$$K_t = (1+i)^t K_0, \text{ kun } t = 1,2,3,\ldots$$

jatkuva korkolasku:

$$K_t = (1+i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1+i) = e^{\rho}$$

Jaksolliset suoritukset

$$\text{prolongointitekijä } s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\text{diskonttaustekijä } a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$\text{kuoletuskerroin } c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\text{annuiteetti: } k = c_{n,i}K_0 \qquad \text{osamaksuerä: } k = c_{n,i}(H - h + m)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Kysynnän hinta jousto

$$\text{kysynnän hintajousto} = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q}$$

Rajatuotto ja kysynnän hinta jousto

$$MR = p \cdot (1 + \frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}})$$