

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

1. harjoitus, (ma 7.1.2013)

1. Ratkaise yhtälöt

a) $2x + 2 = 7x + 8$ b) $6(x + 2) = 5x + 10$ c) $3x + 1 = 3(x + 1)$

2. Ratkaise yhtälöt

a) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ b) $5x^2 + x = 4x^2 - 2x + 4$ c) $(x + 1)(x - 3) = (x + 1)$

3. Ratkaise yhtälöt

a) $2^x = 3$ b) $\ln(x - 1) = 100$ c) $\frac{2x + 1}{x - 1} = 3$

4. Ratkaise epäyhtälöt

a) $x - 1 \leq 3x + 1$ b) $3(x + 1) \geq 5(x - 1)$

5. Yritys myy tammikuussa 256 tuotetta. Yhden tuotteen myyntihinta on 25.20€ ja tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 18.10€ (per tuote). Myyntitulo on $256 \cdot 25.20e = 6451.20e$, valmistuskustannus on $256 \cdot 18.10e = 4633.60e$. Kate on myyntitulo - valmistuskustannus = $6451.20e - 4633.60e = 1817,60$. Kate on siis 28.17% myynnistä.

Helmikuussa tuotteita myydään 300 kappaletta. Myyntihinta ei kasva, mutta valmistuskustannukset (per tuote) kasvavat 5,0%.

- Laske helmikuun myyntitulo (koko tuotanto).
- Laske helmikuun valmistuskustannukset (koko tuotanto).
- Laske helmikuun kate (euroina).
- Laske helmikuun kate (prosentteina myynnistä).
- Miten monta prosenttia myyntitulo kasvoi?
- Miten monta prosenttia valmistuskustannukset kasvoivat?
- Miten monta prosenttia kate kasvoi?
- Miten monta prosenttiyksikköä kate kasvoi?

6. Yritys tarvitsee raaka-aineena pahvia, joka kerätään kierrätysmateriaalista. Kierrätysmateriaalia voidaan ostaa kolmesta paikasta (A, B, C). Kaikki kierrätysmateriaali pitää vielä itse tarkastaa ja hylätyn materiaalin toimittaminen eteenpäin aiheuttaa edelleen kustannuksia. Seuraavassa taulukossa on esitetty keskimääräisiä lukuja eri vaihtoehdoista. Laske raaka-aine -pahvin tonnihinta kussakin hankintavaihtoehdossa.

	A	B	C
kierrätysmateriaalin hinta (per tonni)	100.00	125.00	95.00
Hylättävän materiaalin osuus	6.0%	2.0%	10.0%
Tarkastuksen hinta (per kierr.mat.tonni)	10.0€	11.0€	12.0€
Hylätyn materiaalin käsittely (€/tonni)	20.0	15.0	5.0

7. Piirrä funktion $f(x) = 5 + 2x - 0.1x^2$ kuvaaja. Missä funktio on kasvava ja missä se on vähenevä? (Ohje: Piirrä kuvaaja välille $0 \leq x \leq 20$.)

8. Piirrä välillä $0 \leq x \leq 5$ kuvaajat funktioille

$$f(x) = x^2 - x, \quad g(x) = 4x - 6$$

x	$f(x) = x^2 - x$	x	$g(x) = 4x - 6$
0.0		0.0	
0.5		1.0	
1.0		2.0	
2.0		3.0	
3.0		4.0	
4.0		5.0	
5.0			

9. Ovatko tehtävän 8 funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ kasvavia välillä $0 \leq x \leq 5$?

10. Ratkaise

a) $1.05^x = 1.50$ b) $(1.05)^x \geq (1.15)^3$

11. Yritys haluaa lisätä valmistamansa tuotteen myyntiä. Tätä varten yritys joutuu laskemaan tuotteensa myyntihintaa. Markkinointiosasto selvitti kysyntää ja arvelee, että yritys saa myytyä q tuotetta (viikossa), jos tuotteen myyntihinta on $p = 20 - 0.25q$ (euroa). Mikä pitää myyntihinnan olla, jos yritys haluaa, että myynnistä kertyy viikossa vähintään 375 euroa?

1. harjoitus, (ma 7.1.2013)

1. Ratkaise yhtälöt

a) $2x+2=7x+8$

b) $6(x+2)=5x+10$

c) $3x+1=3(x+1)$

$$\begin{aligned}
 & a) \\
 & 2x+2=7x+8 \\
 \Leftrightarrow & 2x-7x=8-2 \\
 \Leftrightarrow & -5x=6 \quad | :(-5) \\
 \Leftrightarrow & x=-\frac{6}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & b) \\
 & 6(x+2)=5x+10 \\
 \Leftrightarrow & 6x+12=5x+10 \\
 \Leftrightarrow & 6x-5x=10-12 \\
 \Leftrightarrow & x=-2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & c) \\
 & 3x+1=3(x+1) \\
 \Leftrightarrow & 3x+1=3x+3 \\
 \Leftrightarrow & 3x-3x=3-1 \\
 & 0=2 \quad \checkmark \\
 & \text{epätos.} \\
 \rightarrow & R_j = \emptyset
 \end{aligned}$$

Vastaus:

a) $x = -6/5$

b) $x = -2$

c) $R_j = \emptyset$

2. Ratkaise yhtälöt

a) $2x^2+3x+1=0$

b) $5x^2+x=4x^2-2x+4$

c) $(x+1)(x-3)=(x+1)$

$$\text{Kaava } ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$a) \quad 2x^2+3x+1=0 \quad \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ tai } x = -1$$

$$\left(x_1 = -\frac{1}{2} \text{ ja } x_2 = -1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad & 5x^2 + x = 4x^2 - 2x + 4 \\
 \Leftrightarrow & 5x^2 - 4x^2 + x + 2x - 4 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + 3x - 4 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1 \quad \text{tai} \quad x = -4}}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad & (x+1)(x-3) = (x+1) \\
 \Leftrightarrow & x^2 - 3x + x - 3 = x + 1 \\
 \Leftrightarrow & x^2 - 2x - 3 - x - 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x^2 - 3x - 4 = 0
 \end{aligned}$$

$$a = 1, b = -3, c = -4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 4 \quad \text{tai} \quad x = -1}}$$

Vastauks: a) $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = -1$
 b) $x = 1$ tai $x = -4$
 c) $x = 4$ tai $x = -1$

3. Ratkaise yhtälöt

a) $2^x = 3$ b) $\ln(x-1) = 100$ c) $\frac{2x+1}{x-1} = 3$

$$\begin{aligned}
 a) \quad & 2^x = 3 \quad | \ln(\dots) \\
 \Leftrightarrow & \ln 2^x = \ln 3 \\
 \Leftrightarrow & x \ln 2 = \ln 3 \quad | : \ln 2 \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx \underline{\underline{1,58496}}
 \end{aligned}$$

b) $\ln(x-1) = 100 \Leftrightarrow x-1 = e^{100}$
 $\Leftrightarrow x = \underline{e^{100} + 1}$

c) $\frac{2x+1}{x-1} = 3 \quad | \cdot (x-1) \text{ (huom } x \neq 1)$

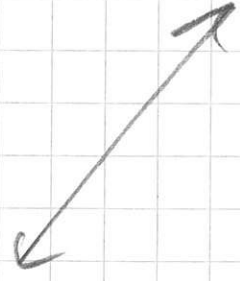
$\Leftrightarrow 2x+1 = 3(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x+1 = 3x-3$

$\Leftrightarrow 2x-3x = -3-1$

$\Leftrightarrow -x = -4$

$\Leftrightarrow \underline{x = 4} \quad \text{ok}$



Vastaus: a) $x \approx 1,58496$
 b) $x = e^{100} + 1$
 c) $x = 4$

4. Ratkaise epäyhtälöt

a) $x-1 \leq 3x+1$ b) $3(x+1) \geq 5(x-1)$

a) $x-1 \leq 3x+1$
 $x-3x \leq 1+1$
 $-2x \leq 2 \quad | :(-2)$
 $\underline{x \geq -1}$

b) $3(x+1) \geq 5(x-1)$
 $3x+3 \geq 5x-5$
 $3x-5x \geq -5-3$
 $-2x \geq -8 \quad | :(-2)$
 $\underline{x \leq 4}$

5. Yritys myy tammikuussa 256 tuotetta. Yhden tuotteen myyntihinta on 25.20€ ja tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 18.10€ (per tuote). Myyntitulo on $256 \cdot 25.20e = 6451.20e$, valmistuskustannus on $256 \cdot 18,10e = 4633.60e$. Kate on myyntitulo - valmistuskustannus = $6451.20e - 4633.60e = 1817,60$. Kate on siis 28.17% myynnistä.

Helmikuussa tuotteita myydään 300 kappaletta. Myyntihinta ei kasva, mutta valmistuskustannukset (per tuote) kasvavat 5,0%.

- a) Laske helmikuun myyntitulo (koko tuotanto).
- b) Laske helmikuun valmistuskustannukset (koko tuotanto).
- c) Laske helmikuun kate (euroina).
- d) Laske helmikuun kate (prosentteina myynnistä).
- e) Miten monta prosenttia myyntitulo kasvoi?
- f) Miten monta prosenttia valmistuskustannukset kasvoivat?
- g) Miten monta prosenttia kate kasvoi?
- h) Miten monta prosenttiyksikköä kate kasvoi?

	TAMMI	HELMI
myyntihinta p	$p_1 = 25.20 \text{ € / kpl}$	$p_2 = p_1 = 25.20 \text{ € / kpl}$
määrä (kpl) q	$q_1 = 256 \text{ kpl / kk}$	$q_2 = 300 \text{ kpl / kk}$
myyntitulo $R = q \cdot p$	$R_1 = 6451,20 \text{ € / kk}$	$R_2 = q_2 \cdot p_2 =$
valm. kust / tuote c	$c_1 = 18,10 \text{ € / kpl}$	$c_2 =$
kok. kust $C = q \cdot c$	$C_1 = 4633,60 \text{ € / kk}$	$C_2 = q_2 \cdot c_2$
kate $K = R - C$	$K_1 = 1817,60 \text{ € / kk}$	$K_2 = R_2 - C_2$
kateprosentti $k_p = \frac{K}{R} \cdot 100\%$	$k_{p1} = 28,17\%$	$k_{p2} = \frac{K_2}{R_2} \cdot 100\% =$

Pohjatyö

b) $c_2 = (1 + \frac{5}{100}) \cdot c_1 = 19,005 \text{ € / kpl}$

c) $C_2 = q_2 \cdot c_2 = 300 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 19,005 \text{ € / kpl} = 5701,50 \text{ € / kk}$

d) $R_2 = q_2 \cdot p_2 = 300 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}} \cdot 25,20 \frac{\text{€}}{\text{kpl}} = 7560,00 \text{ € / kk}$

e) $K_2 = R_2 - C_2 = 7560 \text{ € / kk} - 5701,50 \text{ € / kk} = 1858,50 \text{ € / kk}$

f) $k_{p2} = \frac{K_2}{R_2} \cdot 100\% = \frac{1858,50}{7560} \cdot 100\% = 24,58\%$

e) $\frac{(R_2 - R_1)}{R_1} \cdot 100\% = \frac{(7560 - 6451,20)}{6451,20} \cdot 100\% = 17,2\%$

f) $\frac{(C_2 - C_1)}{C_1} \cdot 100\% = \frac{(5701,5 - 4633,6)}{4633,6} \cdot 100\% = 23,0\%$

g) $\frac{(K_2 - K_1)}{K_1} \cdot 100\% = \frac{(1858,5 - 1817,6)}{1817,6} \cdot 100\% = 2,3\%$

h) $k_{p2} - k_{p1} = 24,58\% - 28,17\% = -3,6\%$

Vastaus

- e) Myyntihinta korvaa 17,2 %
- f) (kokonais) valmistuskustannus korvaa 23 %
- g) Kate korvaa 2,3 %
- h) Kateprosentti pienenee 3,6 prosenttiyksiköllä

6. Yritys tarvitsee raaka-aineena pahvia, joka kerätään kierrätysmateriaalista. Kierrätysmateriaalia voidaan ostaa kolmesta paikasta (A, B, C). Kaikki kierrätysmateriaali pitää vielä itse tarkastaa ja hylätyn materiaalin toimittaminen eteenpäin aiheuttaa edelleen kustannuksia. Seuraavassa taulukossa on esitetty keskimääräisiä lukuja eri vaihtoehdoista. Laske raaka-aine -pahvin tonnihinta kussakin hankintavaihtoehdossa.

	A	B	C
kierrätysmateriaalin hinta (per tonni)	100.00	125.00	95.00
Hylättävän materiaalin osuus	6.0%	2.0%	10.0%
Tarkastuksen hinta (per kierr.mat.tonni)	10.0€	11.0€	12.0€
Hylätyn materiaalin käsittely (€/tonni)	20.0	15.0	5.0

Ostetun kierrätysmateriaalin määrä X tonnia

	A	B	C
Hyvää tavaraa saadaan	0,94 X tn	0,98 X tn	0,90 X tn

	A	B	C
sisään ostettu	100 $\frac{\text{€}}{\text{tn}}$ X tn	125 X €	95 X €
tarkastus	10 X €	11 X €	12 X €
hylätyn kättely	20 · 0,06 · X €	15 · 0,02 X €	5 · 0,10 X €
kustannus yhteensä	111,2 · X €	136,3 X €	107,5 X €

Yhikköhinta = $\frac{\text{Mitä maksoi?}}{\text{paljonko saatiin?}}$

$$P_A = \frac{111,2 \cdot X \cdot \text{€}}{0,94 \cdot X \cdot \text{tn}} = \underline{\underline{118,30 \text{ €/tn}}}$$

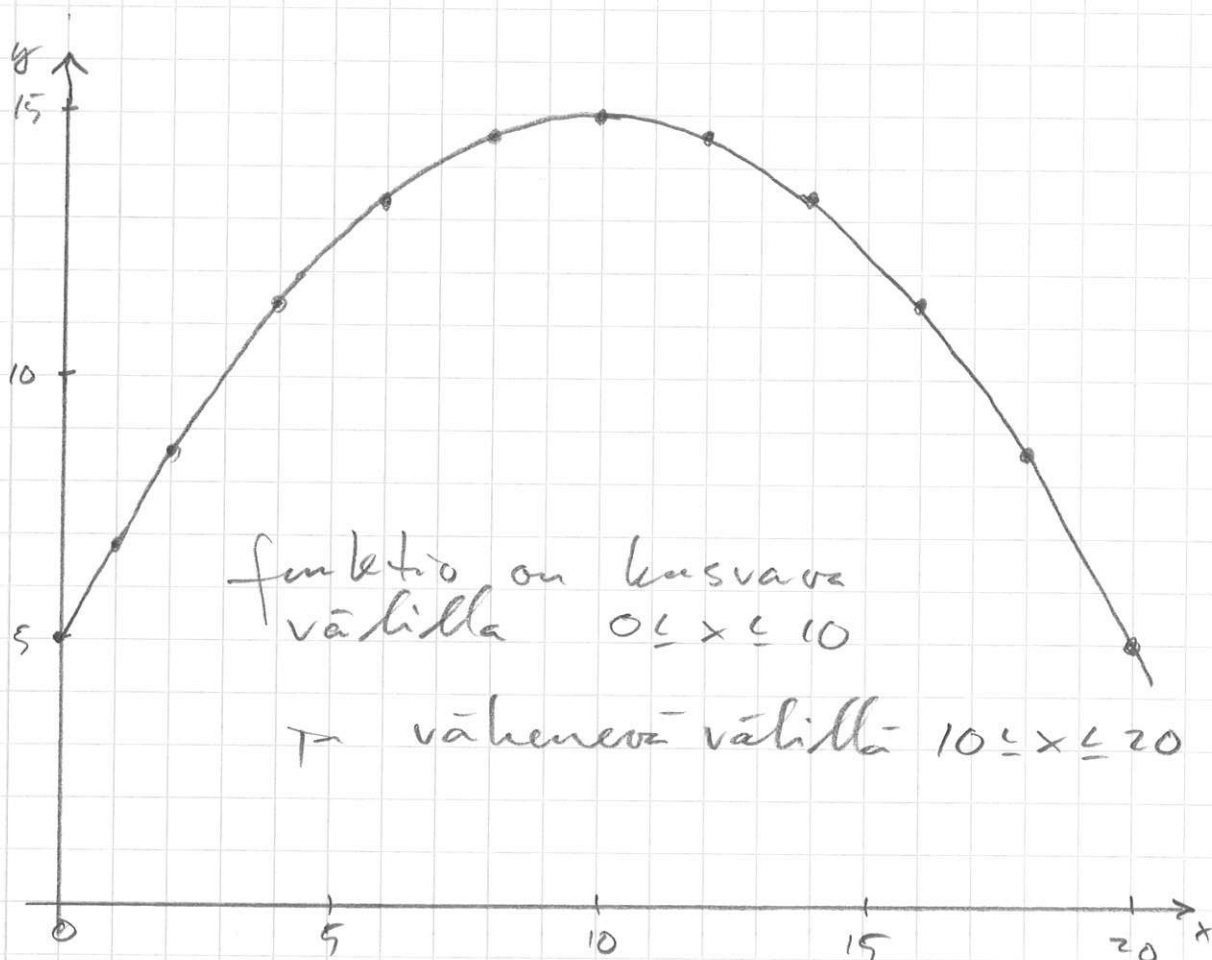
$$P_B = \frac{136,3 \cdot X \cdot \text{€}}{0,98 \cdot X \cdot \text{tn}} = \underline{\underline{139,08 \text{ €/tn}}}$$

$$P_C = \frac{107,5 \cdot X \cdot \text{€}}{0,90 \cdot X \cdot \text{tn}} = \underline{\underline{119,44 \text{ €/tn}}}$$

• edullisin vaihtoehto on A

7. Piirrä funktion $f(x) = 5 + 2x - 0,1x^2$ kuvaaja. Missä funktio on kasvava ja missä se on vähenevä? (Ohje: Piirrä kuvaaja välille $0 \leq x \leq 20$.)

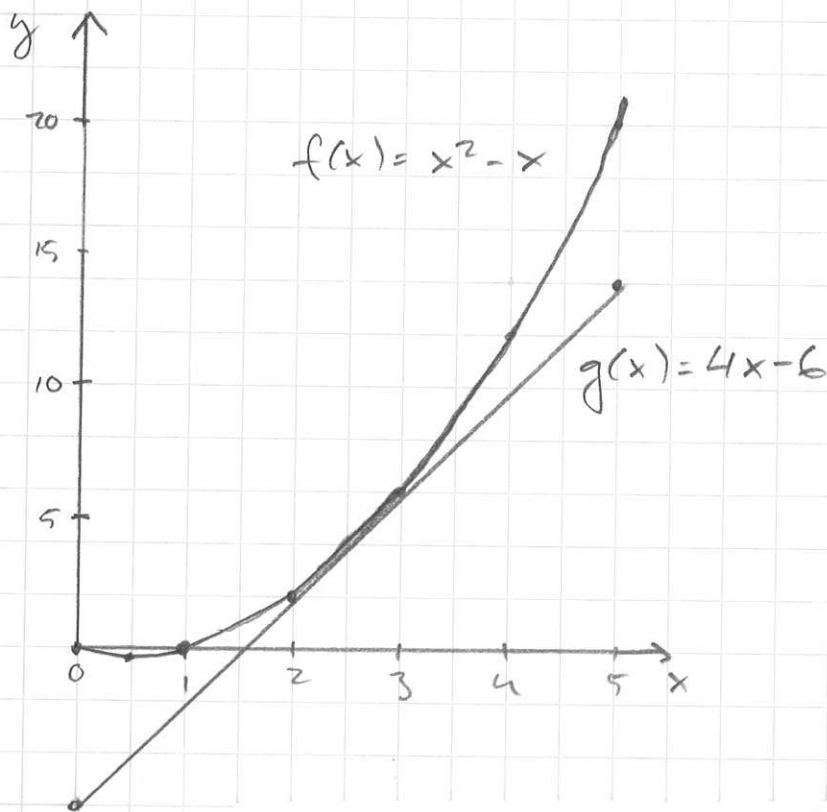
x	$f(x) = 5 + 2x - 0,1x^2$
0	$5 + 2 \cdot 0 - 0,1 \cdot 0^2 = 5 + 0 - 0 = 5,0$
1	$5 + 2 \cdot 1 - 0,1 \cdot 1^2 = 5 + 2 - 0,1 = 6,9$
2	$5 + 2 \cdot 2 - 0,1 \cdot 2^2 = 5 + 4 - 0,4 = 8,6$
4	$5 + 2 \cdot 4 - 0,1 \cdot 4^2 = 5 + 8 - 1,6 = 11,4$
6	$5 + 2 \cdot 6 - 0,1 \cdot 6^2 = 5 + 12 - 3,6 = 13,4$
8	$5 + 2 \cdot 8 - 0,1 \cdot 8^2 = 5 + 16 - 6,4 = 14,6$
10	$5 + 2 \cdot 10 - 0,1 \cdot 10^2 = 5 + 20 - 10 = 15,0$
12	$5 + 2 \cdot 12 - 0,1 \cdot 12^2 = 5 + 24 - 14,4 = 14,6$
14	$5 + 2 \cdot 14 - 0,1 \cdot 14^2 = 5 + 28 - 19,6 = 13,4$
16	$5 + 2 \cdot 16 - 0,1 \cdot 16^2 = 5 + 32 - 25,6 = 11,4$
18	$5 + 2 \cdot 18 - 0,1 \cdot 18^2 = 5 + 36 - 32,4 = 8,6$
20	$5 + 2 \cdot 20 - 0,1 \cdot 20^2 = 5 + 40 - 40 = 5,0$



8. Piirrä välillä $0 \leq x \leq 5$ kuvaajat funktioille

$f(x) = x^2 - x, \quad g(x) = 4x - 6$

x	$f(x) = x^2 - x$	x	$g(x) = 4x - 6$
0.0	$0^2 - 0 = 0$	0.0	$4 \cdot 0 - 6 = -6$
0.5	$0.25 - 0.5 = -0.25$	1.0	
1.0	$1^2 - 1 = 0$	2.0	
2.0	$2^2 - 2 = 2$	3.0	
3.0	$3^2 - 3 = 6$	4.0	
4.0	$4^2 - 4 = 12$	5.0	$4 \cdot 5 - 6 = 14$
5.0	$5^2 - 5 = 20$		



9. Ovatko tehtävän 8 funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ kasvavia välillä $0 \leq x \leq 5$?

g on kasvava koko välillä $0 \leq x \leq 5$
 f ei ole kasvava koko välillä $0 \leq x \leq 5$
 (f on vähenevä välillä $0 \leq x \leq 0.5$)

10. Ratkaise

a) $1.05^x = 1.50$ b) $(1.05)^x \geq (1.15)^3$

a) $1.05^x = 1.50 \quad | \ln(\)$
 $\Rightarrow x \ln 1.05 = \ln 1.50$
 $\Rightarrow x = \frac{\ln 1.50}{\ln 1.05} \approx 8.31$

b) $(1.05)^x \geq (1.15)^3 \quad | \ln(x) \quad \ln \text{ on kasvava funktio!}$
 $\Rightarrow \ln [1.05^x] \geq \ln [1.15^3]$
 $\Rightarrow x \ln 1.05 \geq 3 \ln 1.15$
 $\Rightarrow x \geq \frac{3 \ln 1.15}{\ln 1.05} \approx 8.59$

Vastaus a) $x = 8.31$
 b) $x \geq 8.59$

11. Yritys haluaa lisätä valmistamansa tuotteen myyntiä. Tätä varten yritys joutuu laskemaan tuotteensa myyntihintaa. Markkinointiosasto selvitti kysyntää ja arvelee, että yritys saa myytävä q tuotetta (viikossa), jos tuotteen myyntihinta on $p = 20 - 0.25q$ (euroa). Mikä pitää myyntihinnan olla, jos yritys haluaa, että myynnistä kertyy viikossa vähintään 375 euroa?

$p = 20 - 0.25q$ $R = q \cdot p = (80 - 4p) \cdot p$
 $\Rightarrow 0.25q = 20 - p$ $= 80p - 4p^2$
 $\Rightarrow q = 80 - 4p$

∴ Millä p :n arvoilla $R \geq 375$
 $\Rightarrow 80p - 4p^2 \geq 375$
 $\Rightarrow -4p^2 + 80p - 375 \geq 0$
 $f(p)$

$\Rightarrow \underline{7.5 \leq p \leq 12.5}$

V: Myyntihinnan tulee olla vähintään 7,5 € ja enintään 12,5 €

