

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

1. välikoe, (la 26.1.2013)

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava).

1. a) Milloin funktio on kasvava välillä $a \leq x \leq b$? (Miten se määritellään ja miten asiaa voi tutkia?)

b) Onko funktio $f(x) = x^2 - 10x$ kasvava tai vähenevä välillä $0 \leq x \leq 2$

c) Ratkaise x yhtälöstä

$$1,025^x = 1,45$$

1a) funktio on kasvava välillä $a \leq x \leq b$ jos
kaikilla $x_1, x_2 \in [a, b]$, joille $x_1 < x_2$ on
totta, että

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

(eli isommissa kohdassa funktion arvo on suurempi tai sama kuin pienemässä kohdassa)

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 10x \\ f'(x) &= 2x - 10 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \text{Jos } 0 \leq x \leq 2 & \quad | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 4 & \quad | -10 \\ \Leftrightarrow -10 \leq 2x - 10 \leq -6 & \\ \Rightarrow f'(x) < 0 & \end{aligned}$$

Koska derivaatta on koko välillä negatiivinen
ja $f(x)$ on jatkuva, niin f on vähenevä.

c)

$$1,025^x = 1,45 \quad | \ln$$

$$x \ln 1,025 = \ln 1,45 \quad | : \ln 1,025$$

$$x = \frac{\ln 1,45}{\ln 1,025} \approx \underline{\underline{15,05}}$$

Vastaus: a) ja b) f on vähenevä välillä $0 \leq x \leq 2$

c) $x \approx 15,05$

2. (a) Laske 3,20% todelliseen vuosikorkoon liittyvä kuukausikorkokanta.
 (b) Mikä on todellinen vuosikorko, kun kuukausikorkokanta on 0,005325?
 (c) Laske tasaerälainan annuiteetti, kun lainan määrä on 2000€, laina-aika on 20 kuukautta, laina hoidetaan kuukausierinä, ja lainaan liittyvä todellinen vuosikorko on 4,25%.

$$\begin{aligned}
 a) \quad (1+i)^{12} &= 1,0320 \\
 1+i &= 1,0320^{1/12} \\
 i &= 1,0320^{1/12} - 1 = \underline{\underline{0,00262833696}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad 1,005325^{12} &= 1,065805091 \\
 &\rightarrow \text{todellinen vuosikorko on } \underline{\underline{6,58\%}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad 1+i &= 1,0425^{1/12} \\
 k &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot k_0 \\
 &= \frac{[1,0425^{1/12} - 1] \cdot 1,0425^{20/12}}{(1,0425^{20/12} - 1)} \cdot 2000 \text{ €} \\
 &= \underline{\underline{103,69 \text{ €}}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Tarvitaan } 20 \cdot 103,69 \text{ €} \\ = 2073,80 \text{ €} \\ \text{OK} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Vastaus: a) 0,00262833696
 b) 6,58%
 c) 103,69 €

3. Yritys valmistaa eräällä tuotantolinjallaan q tuotetta kuukaudessa. Tuotteen kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.005q$ ja vastaava kustannusfunktio on $C(q) = 0.02q^2 + 5q + 1200$.

a) Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen? Mikä on maksimivoitto?

b) Yritys ei tällä hetkellä toimi parhaalla mahdollisella tavalla, vaan sen tuotannon määrä ei ole mallin mukaan paras mahdollinen. Oletamme, että edellä annetut kysyntä- ja kustannusfunktio kuvaavat markkinoita ja yritystä oikein. Lisäksi tiedämme, että tällä hetkellä tuotanto $q = 200$ (kpl/kk) saadaan myytyä yksikköhintaan $p = 19,00$ (euroa/tuote). Laske tässä tilanteessa rajatuotto ja rajakustannus. Mihin suuntaan tuotannon määrää tulisi korjata?

$$\begin{aligned} a) \quad p &= 20 - 0,005q \\ R &= 20q - 0,005q^2 \\ MR &= 20 - 0,01q \\ C &= 0,02q^2 + 5q + 1200 \\ MC &= 0,04q + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MC &= MR \\ 0,04q + 5 &= 20 - 0,01q \quad | \cdot 20 \\ 0,05q &= 15 \\ q &= 300 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(300) &= R(300) - C(300) \\ &= (20 \cdot 300 - 0,005 \cdot 300^2) - (0,02 \cdot 300^2 + 5 \cdot 300 + 1200) \\ &= 6000 - 450 - 1800 - 1500 - 1200 \\ &= 1050 \end{aligned}$$

$$b) \quad q = 200$$

$$\text{Rajatuotto} = MR(200) = 20 - 0,01 \cdot 200 = 18 \text{ €/kpl}$$

$$\text{Rajakustf.} = MC(200) = 0,04 \cdot 200 + 5 = 13 \text{ €/kpl}$$

$MR > MC \Rightarrow$ tuotantoa kannattaa laajentaa

4. (a) Muuttujan x arvo muuttuu arvosta x_0 arvoon x_1 (jolloin muutos on siis $\Delta x = x_1 - x_0$). Muuttujan x arvon muutos aiheuttaa samaan aikaan sen, että muuttujan y arvo muuttuu arvosta y_0 arvoon y_1 (jolloin muutos on siis $\Delta y = y_1 - y_0$). Selitä lyhyesti sanallisesti, mitä tarkoittaa ja miten lasketaan y :n jousto x :n suhteen. Voit antaa lausekkeenkin, mutta tärkeämpää on nyt antaa sanallinen kuvaus asiasta.

(b) Tuotteen hinta on 20,00€ ja kysyntä 22 100 kpl/kk. Kun tuotteen hintaa laskettiin eurolla, niin uudeksi kysynnäksi muodostui 19 200 kpl/kk. Mikä on tuotteen kysynnän hintajouaston arvo?

a) y :n jousto x :n suhteen on y :n prosenttimuutos jaettuna x :n prosenttimuutoksella.

$$\text{jousto} = \frac{\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\%}{\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$$

b) $p = 20,00 \text{ €}$
 $\Delta p = -1,00 \text{ €}$

$q = 22\,100 \text{ kpl/kk}$
 $\Delta q = (19\,200 - 22\,100) \text{ kpl/kk} = -2\,900 \text{ kpl/kk}$

$$\text{jousto} = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{-2\,900 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}}}{-1,00 \text{ €}} \cdot \frac{20,00 \text{ €}}{22\,100 \frac{\text{kpl}}{\text{kk}}} = 2,62$$