

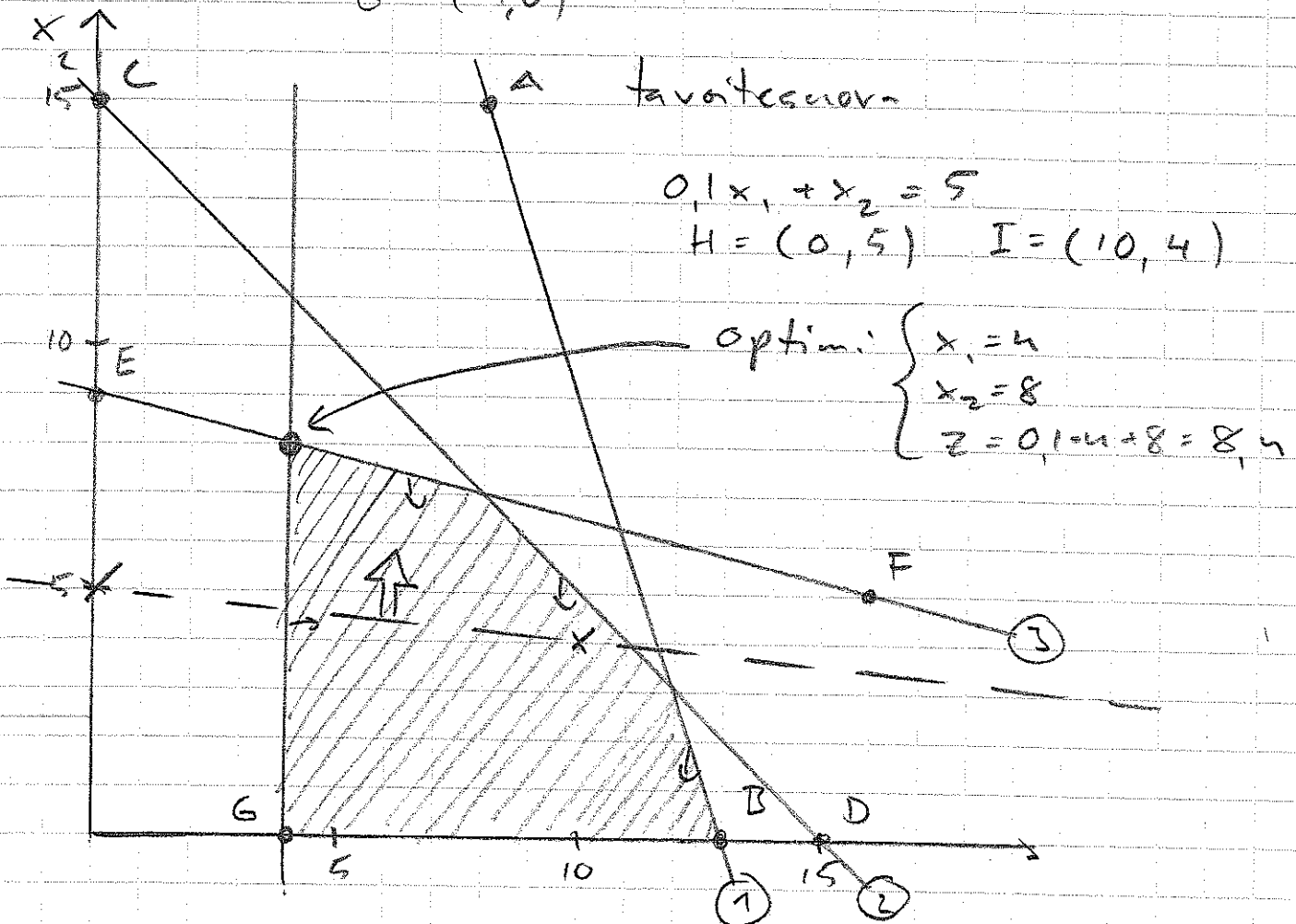
**Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030**  
 esimerkkikoe (2. välikoe) 2.4.2007

Ratkaise kolme tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin (myös graafinen) ja taulukkokirja.

1. Ratkaise LP-malli

$$\begin{aligned} \max z &= 0.1x_1 + x_2 \\ \text{ehdoin} \quad 3x_1 + x_2 &\leq 39 \\ x_1 + x_2 &\leq 15 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 36 \\ x_1 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. rajoite  $3x_1 + x_2 \leq 39$     ↓ alapuoli käyppi  
 $A = (8, 15)$  ,  $B = (13, 0)$
2. rajoite  $x_1 + x_2 \leq 15$     ↓ alapuoli käyppi  
 $C = (0, 15)$  ,  $D = (15, 0)$
3. rajoite  $x_1 + 4x_2 \leq 36$     ↓ alapuoli käyppi  
 $E = (0, 9)$      $F = (16, 5)$
4. rajoite  $x_1 \geq 4$     → oikea puoli käyppi  
 $G = (4, 0)$



2. Laske luvuille (12.25; 20.30; 15.10; 75.65) a) keskiarvo, b) keskiarvo painokertoimin (5; 3; 1; 1), c) keskiverto ja d) selitä lyhyesti Paaschenin volyyymi-indeksi (joka löytyy kaavakokoelmasta).

$$a) \frac{12,25 + 20,30 + 15,10 + 75,65}{4} = \underline{\underline{30,8250}}$$

$$b) \frac{5 \cdot 12,25 + 3 \cdot 20,30 + 1 \cdot 15,10 + 1 \cdot 75,65}{5 + 3 + 1 + 1} = \underline{\underline{21,2900}}$$

$$c) \left( 12,25 \cdot 20,30 \cdot 15,10 \cdot 75,65 \right)^{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{23,0863}}$$

$$d) Q_{toit}^P = \frac{\sum q_t p_t}{\sum q_t \cdot p_t} \cdot 100$$

= vuoden  $t$  hinnalla painotettu keskiarvo vuoden  $t$  myynistä jaettuna vuoden  $t$  hinnoilla painotetulla keskiarvolla vuoden  $t_0$  myynistä.

= vuoden  $t$  myynti / vuoden  $t$  hinnoilla  
vuoden  $t_0$  myynti / vuoden  $t$  hinnoilla

3. a) Yritys aloittaa projektin, jonka alussa yritys investoi tuotantoon 25 000 €. Toiminnasta saadaan nettotuloa 550 €/kk ja viiden vuoden kuluttua toiminta loppuu, jolloin tuotantolaitteiston myynnistä arvioidaan saatavan 7000 €. Laske projektin antaman kassavirran nettonykyarvo, kun laskennassa käytetään 8,0%:n todellista vuosikorkoa.
- b) Kuvaa lyhyesti neljä projektin kannattavuuden mittaria. (Miten lasketaan, milloin projekti on kannattava?)
- c) Mikä laskennallinen ongelma saattaa liittyä sisäiseen korkokantaan?

$$(1+i)^{12} = 1,08 \rightarrow i = 1,08^{\frac{1}{12}} - 1$$

$$\begin{aligned} a) \text{ NPV} &= -25000 \text{€} + \sum_{j=1}^{60} \frac{550 \text{€}}{(1+i)^j} + \frac{7000 \text{€}}{(1+i)^{60}} \\ &= -25000 \text{€} + \frac{(1,08^5 - 1) \cdot 550 \text{€}}{[1,08^{\frac{1}{12}} - 1] \cdot 1,08^5} + \frac{7000 \text{€}}{1,08^5} \\ &= -25000 \text{€} + 27304,70 \text{€} + 4764,08 \text{€} \\ &= 7068,78 \text{€} \end{aligned}$$

b) Nettoykyarvo  $\text{NPV} = -H + \sum_{j=1}^N \frac{K_j}{(1+i)^j} + \frac{JA}{(1+i)^N}$   
 Jos  $\text{NPV} > 0$ , niin projekti on kannattava

Suhdeellinen ykyarvo  $\text{SNA} = \frac{\text{NPV}(\text{tulovirtä})}{\text{NPV}(\text{menovirtä})}$   
 Jos  $\text{SNA} > 1$ , niin projekti on kannattava

Takaisinmaksuaika on se perustajan lukumäärä  $n^*$  jolta ajalta tulovirran alkuarvo ( $j=1, \dots, n^*$ ) ykyarvo kattaa perusinvestoinnin ( $\sum_{j=1}^{n^*} \frac{K_j}{(1+i)^j} = H$ )  
 investointi on kannattava jos  $n^* < \text{projektin kesto}$ .

Sisäinen korkokanta  $i_s$  = se korkeampi korko, jolla  $\text{NPV} = 0$ . Jos  $i_s > i$ , niin projekti on kannattava

$\text{ROI} = \text{pääoman tuottoaste} = \frac{K}{H} \cdot 100\% \approx (i_s \cdot 100\%)$   
 Jos  $\text{ROI} > i \cdot 100\% = p\%$

c) Sisäinen korkokanta ei aina ole olemassa, jos kassavirta vaihtaa merkittävästi liian monta kertaa.

4. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} y + 2z = 19 \\ 2x + 2y + 3z = 18 \\ -2x + 2z = 30 \end{cases}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & | & 18 \\ 0 & 1 & 2 & | & 19 \\ -2 & 0 & 2 & | & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow{+1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & | & 18 \\ 0 & 1 & 2 & | & 19 \\ 0 & 2 & 5 & | & 48 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & | & 18 \\ 0 & 1 & 2 & | & 19 \\ 0 & 0 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} 2x + 2y + 3z = 18 & (1) \\ y + 2z = 19 & (2) \\ z = 10 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \rightarrow z = 10$$

$$(2) \rightarrow y + 2 \cdot 10 = 19 \rightarrow y = -1$$

$$(1) \rightarrow 2x + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 10 = 18 \rightarrow x = -5$$

$$\text{Vastaus: } \begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \\ z = 10 \end{cases}$$

5. Määritä a) (2p) determinantti b) (1p) transpoosi ja c) (2p) käänteismatriisi matriisille

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

d) (1p) kirjoita yhtälöryhmäksi

$$(x \ y \ z)A = (1 \ 7 \ 0).$$

(Älä ratkaise tätä yhtälöryhmää!).

$$\begin{aligned} a) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} &= 0 \cdot \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 - (2 \cdot 2 - 3 \cdot (-2)) + 2(2 \cdot 0 - 2 \cdot (-2)) \\ &= 0 - (4 + 6) + 2(0 + 4) \\ &= 0 - 10 + 8 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$b) A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c) A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 10 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} +A_{11} & -A_{21} & +A_{31} \\ -A_{12} & +A_{22} & -A_{32} \\ +A_{13} & -A_{23} & +A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -10 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0,5 \\ 5 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 7 \ 0)$$

$$\Leftrightarrow (2y - 2z \quad x + 2y \quad 2x + 3y + 2z) = (1 \ 7 \ 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2z = 1 \\ x + 2y = 7 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$