Vaasan yliopisto, kevät 2009

Talousmatematiikan perusteet, orms.1030

2. välikoe 6.4.2009

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja.

1. a) Kerro lyhyesti miten määritellään projektin sisäinen korkokanta. Mitä ongelmia sisäisen korkokannan laskemiseen saattaa liittyä? Milloin ongelmia varmuudella ei ole?
b) Kuvaile kolme muuta projektin kannattavuuden mittaria.

2. Ratkaise LP-malli

$$\begin{array}{lrcrcr} \max z = & 3x_1 & + & 0.5x_2 & & \\ \text{ehdoin} & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\ & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 40 \\ & & & x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

3. Investointiprojektin perusinvestointi on 8 250 € ja kuukausittainen nettotulovirta alkaa heti investoinnin jälkeen ja kestää 5 vuotta. Miten suuri tulee kuukausittaisen nettotulovirran olla (x € /kk) jotta investointi olisi kannattava, kun laskentakorko on 8% (todellinen vuosikorko).

4. a) Olkoon

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laske $\det(\mathbf{M})$, $\mathbf{M}^T$ ja $\mathbf{M}^{-1}$.
b) Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ \quad + y - z = 3 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}$$

Korkolasku:

$$\begin{aligned} & \text{yksinkertainen korkolasku:} \\ K_t &= (1+it)K_0 = (1+\frac{p}{100}t)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1 \\ & \text{koronkorkolasku:} \\ K_t &= (1+i)^t K_0, \text{ kun } t = 1, 2, 3, \dots \\ & \text{jatkuva korkolasku:} \\ K_t &= (1+i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1+i) = e^{\rho} \end{aligned}$$

Jaksolliset suoritukset

$$\begin{aligned} \text{prolongointitekijä } s_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ \text{diskonttaustekijä } a_{n,i} &= \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \\ \text{kuoletuskerroin } c_{n,i} &= \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \end{aligned}$$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\begin{aligned} \text{annuiteetti } k &= c_{n,i} K_0 \\ \text{osamaksuerä } k &= c_{n,i}(H - h + m) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Takaisinmaksuaika

Takaisinmaksuaika jaksotetulle vakiotulovirralle

$$n^* = \ln\left(\frac{k}{k - iB}\right) / \ln(1+i), \qquad \text{missä } B = H - \frac{JA}{(1+i)^n}$$

Takaisinmaksuaika jatkuvalle vakiotulovirralle

$$T^* = \ln\left(\frac{k}{k - \rho B}\right) / \rho, \qquad \text{missä } B = H - \mathrm{e}^{-\rho T} JA$$

Nykyarvot

Jaksotettu vakio-tulovirta (kesto n jaksoa, $k_t = k$ kaikilla t):

$$NPV = -H + a_{n,i} \cdot k + \frac{JA}{(1+i)^n}$$

Jatkuvalle vakiotulovirta (kesto T, $k(t) = k$ kaikilla t):

$$NPV = -H + \frac{k}{\rho}(1 - \mathrm{e}^{-\rho T}) + \mathrm{e}^{-\rho T} JA$$

Pääoman tuottoaste

$$\begin{aligned}
\mathrm{ROI}^{\mathrm{I}} &= \frac{\text{nettovuositulos}}{\text{keskimäärin sidottu pääoma}} \cdot 100\% \\
\mathrm{ROI}^{\mathrm{II}} &= \frac{\text{nettovuositulos}}{\text{alussa sidottu pääoma}} \cdot 100\%
\end{aligned}$$

Jos nettotulo k (€ /kk) on liikevoitto, se ei sisällä perusinvestoinnin aiheuttamaa lainanhoitoa. Lyhyen projektin tapauksessa voimme silloin arvioida karkeasti

$$\mathrm{ROI}^{\mathrm{I}} = \frac{\text{nettovuositulos}}{\text{keskimäärin sidottu pääoma}} \cdot 100\% = \frac{(k - H/n) \cdot 12}{H/2} \cdot 100\%$$

Matriisikaavoja $(n \times n)$ neliöatriisille $\mathbf{A} = (a_{ij})$

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik}) \qquad = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{kj}) \\
& \quad \text{missä } \det(\mathbf{A}_{rs}) \text{ on alkioon } a_{rs} \text{ liittyvä minori} \\
\mathrm{adj}(\mathbf{A}) &= (\alpha_{ij}) \\
& \quad \text{missä } \alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ji}) \text{ on alkioon } a_{ji} \text{ liittyvä kofaktori} \\
\mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \mathrm{adj}(\mathbf{A}) \\
& \quad \text{Cramerin kaavat:} \\
x_j &= D_j / D
\end{aligned}$$