

Talousmatematiikan perusteet, orms.1030

2. välikoe 6.4.2009

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja.

1. a) Kerro lyhyesti miten määritellään projektin sisäinen korkokanta. Mitä ongelmia sisäisen korkokannan laskemiseen saattaa liittyä? Milloin ongelmia varmuudella ei ole?
b) Kuvaile kolme muuta projektin kannattavuuden mittaria.

a) Sisäinen korkokanta on se laskeutuuskorko, jolla nettokassavirran nykyarvo on nolla. Määrittelyn mukaisista sisäisistä korkokannoista ei aina ole olemassa. Ongelmia ei ole, jos nettokassavirta vaihtelee suunnasta (merkkiä) vain kerran. Tyypillisesti alku negatiivisia nettokassaeräitä seuraa loppuna positiiviset nettokassaerät.

b) NPV: Nettonykyarvo saadaan, kun kassavirran jokainen erä diskoutetaan nykyhetkeen ja diskoutetut arvot laskeutaan yhteen. Projekti on kannattava käytetyllä diskonttauskorolla, jos nettonykyarvo on > 0 .

SNA: Suhteellinen nykyarvo on tulovirran nykyarvo jaettuna menovirran nykyarvolla. Projekti on kannattava jos $SNA > 1$.

$ROI_{\pi} = \text{jaljon nettotulos jaettuna alusta riidottulla pääomalla} \times 100\%$. Pithällä projektilla ROI_{π} sisäinen korkokanta. Paljon käytetty.

Takaisinmaksuaika: ilmoittaa miten monen jaljon nettotulus tulee projektin alusta lähtien, jotta heikempi tulovirran nykyarvo katka perusinvestoinnin. Projekti on kannattava jos takaisinmaksuaika on pienempi kuin projektin kesto.

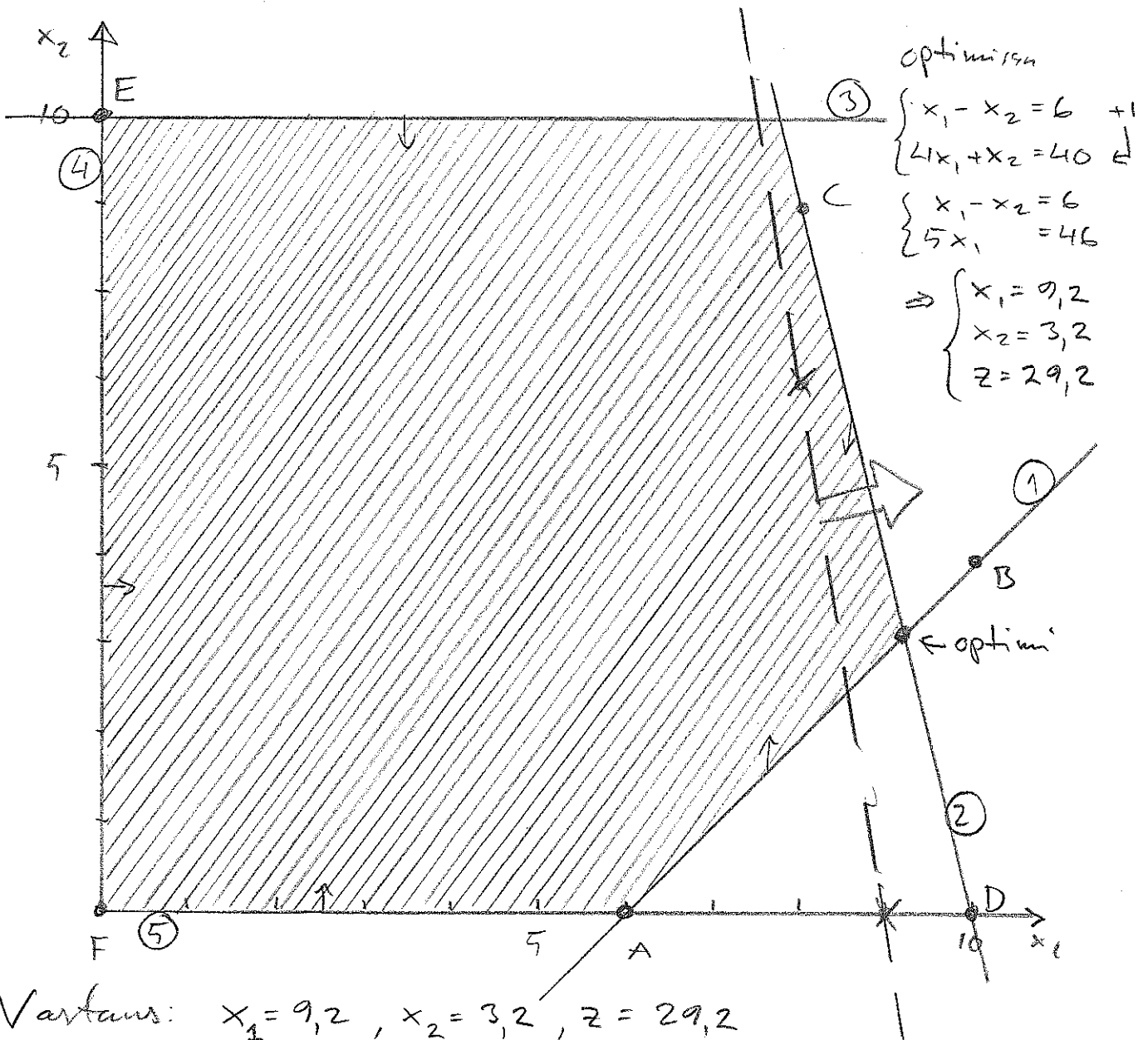
Annuitettimenetelmä laskeaan perusinvestoinnin vaatiman tasaa-luomisen annuitetti. Jos annuitetti on pienempi kuin nettotulos/jaljo, niin jr. on kannattava.

2. Ratkaise LP-malli

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 0.5x_2 \\ \text{ehdoin} \quad x_1 - x_2 &\leq 6 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 40 \\ x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. rajoite: $x_1 - x_2 \leq 6$ $A=(6,0), B=(10,4)$ ↑ yläp. käyrä
 2. rajoite: $4x_1 + x_2 \leq 40$ $C=(8,8), D=(10,0)$ ↓ alap. käyrä
 3. rajoite: $x_2 \leq 10$ $E=(0,10)$ ↓ alap. käyrä
 4. rajoite: $x_1 \geq 0$ $F=(0,0)$ → oik.p. käyrä
 5. rajoite: $x_2 \geq 0$ $F=(0,0)$ ↑ yläp. käyrä

Tavoitesuora: $3x_1 + 0.5x_2 = 27$ $G=(8,6), H=(9,0)$ ↘



3. Investointiprojektin perusinvestointi on 8250 € ja kuukausittainen nettotulovirta alkaa heti investoinnin jälkeen ja kestää 5 vuotta. Miten suuri tulee kuukausittaisen nettotulovirran olla (x €/kk) jotta investointi olisi kannattava, kun laskentakorko on 8% (todellinen vuosikorko).

Lasketaan perusinvestoinnin vaatiman tasaerälainan annuiteetti, kun laina hoidetaan 5 vuotta.

$$(1+i)^{12} = 1,08 \rightarrow (1+i) = 1,08^{\frac{1}{12}}$$

$$\text{Annuiteetti} = AN = \frac{x(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot H$$

$$= \frac{[1,08^{\frac{1}{12}} - 1] \cdot 1,08^{60/12}}{1,08^{60/12} - 1} \cdot 8250 \text{ €}$$

$$= 166,18 \text{ €}$$

Vastaus: Kuukausittainen netto tulovirta tulee olla vähintään 166,18 € ($x > 166,18$) jotta sillä voidaan hoitaa laina.

4. a) Olkoon

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laske $\det(M)$, M^T ja M^{-1} .

b) Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ \quad + y - z = 3 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}$$

a)

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (1 - (-1)) + 1 \cdot (0 - (-2)) + 3 \cdot (0 - 2)$$
$$= 2 + 2 - 6$$
$$= \underline{\underline{-2}}$$

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

kääntäismatriisi (1. tapa)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2 \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \\ +1 \quad -3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{-2} & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \\ +1 \quad -\frac{1}{2} \quad :(-2) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Kääntäismatriisi (2. tapa)

$$\det(M) = -2$$

Minorit

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} +A_{11} & -A_{21} & +A_{31} \\ -A_{12} & +A_{22} & -A_{32} \\ +A_{13} & -A_{23} & +A_{33} \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} +2 & -(-4) & +(-2) \\ -2 & +(-5) & -(-1) \\ +(-2) & -3 & +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 5/2 & -1/2 \\ 1 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{-3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 1 & (1) \\ y - z = 3 & (2) \\ -2z = -12 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \rightarrow z = 6$$

$$(2) \rightarrow y - 6 = 3 \rightarrow y = 9$$

$$(1) \rightarrow x - 9 + 3 \cdot 6 = 1 \rightarrow x = -8$$

Variaani:

$$\begin{cases} x = -8 \\ y = 9 \\ z = 6 \end{cases}$$

tarkistus

$$\begin{array}{rcl} -8 - 9 + 3 \cdot 6 & = & 1 \quad \checkmark \\ 9 - 6 & = & 3 \quad \checkmark \\ 2 \cdot (-8) + 9 + 6 & = & -1 \quad \checkmark \end{array}$$

2. Lupa

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 5/2 & -1/2 \\ 1 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$