Matriisit, L13

Matriisi on suorakulmainen lukukaavio. Matriiseja ovat esimerkiksi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0.4 & 8 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- Kaavio kirjoitetaan kaarisulkujen väliin (amer. kirjoissa usein hakasulkujen väliin.)
- Luvut tulee kirjoittaa selkeästi riveihin ja sarakkeisiin.
- Lukujen väliin tulee jättää riittävästi väliä. Mitään erottimia (pilkku, tms.) ei lukujen väliin laiteta.

Jos kaaviossa on m riviä ja n saraketta, niin sanomme kaaviota $m \times n$-matriisiksi.

- Edellä matriisi

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0.4 & 8 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

  on 2×3 -matriisi.

- Matriisi

$$\boldsymbol{v} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  on 2×1 -matriisi, eli sarakevektori.

- Matriisi
$$\boldsymbol{u} = \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$
on 1×4 -matriisi, eli rivivektori.
- Matriiseille kannattaa laskiessa lähes aina antaa nimi.
  - Matriisin nimi kirjoitetaan kirjaimella, joka on iso, lihava ja vino. (Esim. $\boldsymbol{A}$)
  - Vektorin nimi kirjoitetaan kirjaimella, joka on pieni, lihava ja vino (tai pieni, normaali, ja vino ja sen päällä on nuoli tai viiva). (Esim. $\boldsymbol{u} = \vec{u}$)
- Käsin kirjoitettaessa lihavointi ja vinous jätetään pois.

Matriisin $\boldsymbol{A}$ rivillä r sarakkeessa c olevaa lukua merkitsemme a_{rc}. Vektorin tapauksessa yksi indeksi riittää.

Esimerkki:

$$
\begin{aligned}
\text{Jos } \boldsymbol{M} &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \text{ niin } m_{23} = 7 \\
\text{jos } \boldsymbol{v} &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \text{ niin } v_3 = 7
\end{aligned}
$$

- Jos tulkintaongelmia ei tule, niin merkinnän m_{23} rivi-indeksin 2 ja sarake-indeksin 3 väliin ei lisätä erotinta.
- Joskus erotin on tarpeen. Esimerkiksi 30×30 -matriisin $\boldsymbol{Q}$ alkio rivillä 12 sarakkeessa 3 on $q_{12,3}$.

Matriisin (pää)lävistäjä (diagonaali) muodostuu niistä luvuista, joiden rivi-osoite ja sarake-osoite ovat samat. Matriisin $\boldsymbol{A}$ lävistäjällä ovat siis luvut $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & -1 & 0 \\ 2 & \mathbf{1} & 5 \\ -2 & 4 & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

Matriisi on neliömatriisi $(n \times n)$, jos siinä on sarakkeita yhtä monta kuin rivejä.

Nollamatriisi $\mathbf{0}$ on matriisi, jonka kaikki alkiot ovat nollia. Nollamatriisin ei tarvitse olla neliömatriisi.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Yksikkömatriisi $\boldsymbol{I}$ on neliömatriisi, jonka lävistäjällä on ykkösiä ja muualla nollia

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$m \times n$ -matriisi $\boldsymbol{A}$ ja $p \times q$ -matriisi $\boldsymbol{B}$ ovat samat (identtiset) ja merkitsemme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, jos

1. Kummassakin on yhtä monta riviä eli $m = p$, ja
2. Kummassakin on yhtä monta saraketta eli $n = q$, ja
3. Niissä on samat luvut samoissa paikoissa

$$a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j.$$

Esimerkki: Jos

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},$$

niin $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, mutta $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{C}$.

Kahden saman kokoisen matriisin summa lasketaan niin, että samassa paikassa olevat luvut lasketaan yhteen ja tulos sijoitetaan samaan paikkaan.

$$\text{Jos } \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}, \text{ niin } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j$$

Esimerkki

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriisi kerrotaan luvulla siten, että jokainen matriisin luku erikseen kerrotaan.

$$\text{Jos } \boldsymbol{C} = r \cdot \boldsymbol{A}, \text{ niin } c_{ij} = r \cdot a_{ij}, \forall i, j$$

Esimerkki

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 0 & 10 \\ 5 & -20 \end{pmatrix}$$

Edellä tehdyistä määritelmistä seuraa, että

- $$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{A}$$
- $$r\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{A} = (r+q)\boldsymbol{A}$$
- $$-\boldsymbol{A} = (-1) \cdot \boldsymbol{A}$$
- $$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$$

Kahden vektorin pistetulo saadaan periaatteella: Laske ensimmäisten koordinaattien tulo + toisten koordinaattien tulo + ... + viimeisten koordinaattien tulo.

Eli kaavalla

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j$$

Esimerkki

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 5 \cdot (-2) = -6$$

$m \times p$ -matriisin $\boldsymbol{A}$ ja $p \times n$ -matriisin $\boldsymbol{B}$ tulo on $m \times n$ -matriisi $\boldsymbol{C}$ jonka alkio c_{ij} rivillä i sarakkeessa j saadaan laskemalla $\boldsymbol{A}$:n i:nnen rivin ja $\boldsymbol{B}$:n j:nnen sarakkeen pistetulo.

$$(\boldsymbol{AB})_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 1 & 2 \\ \mathbf{-1} & 2 & 1 & 0 \\ \mathbf{5} & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{14} & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \mathbf{0} & 1 & 2 \\ -1 & \mathbf{2} & 1 & 0 \\ 5 & \mathbf{-1} & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & \mathbf{-1} & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ -1 & 2 & \mathbf{1} & 0 \\ 5 & -1 & \mathbf{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & \mathbf{5} & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & \mathbf{2} \\ -1 & 2 & 1 & \mathbf{0} \\ 5 & -1 & 2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & \mathbf{6} \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 1 & 2 \\ \mathbf{-1} & 2 & 1 & 0 \\ \mathbf{5} & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & 6 \\ \mathbf{0} & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \mathbf{0} & 1 & 2 \\ -1 & \mathbf{2} & 1 & 0 \\ 5 & \mathbf{-1} & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & \mathbf{3} & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ -1 & 2 & \mathbf{1} & 0 \\ 5 & -1 & \mathbf{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & \mathbf{3} & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & \mathbf{2} \\ -1 & 2 & 1 & \mathbf{0} \\ 5 & -1 & 2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

Siis

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}:\, 2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}:\, 3\times 4} = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{AB}:\, 2\times 4}$$

Huomaa, että

- Jotta kertolasku $\boldsymbol{AB}$ onnistuu tulee $\boldsymbol{A}$:n rivin olla yhtä pitkä kuin $\boldsymbol{B}$:n sarake on korkea.
- Tulossa $\boldsymbol{AB}$ on yhtä monta riviä kuin matriisissa $\boldsymbol{A}$ ja yhtä monta saraketta kuin matriisissa $\boldsymbol{B}$.

Matriisien yhteenlasku ja reaaliluvulla kertominen noudattavat seuraavia lakeja. Olkoon $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ $m \times n$ -matriiseja ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Silloin

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \\
&(2) \qquad \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A} \\
&(3) \qquad \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0} \\
&(4) \qquad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(5) \qquad 1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \\
&(6) \qquad \alpha(\beta \mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A} \\
&(7) \qquad (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A} \\
&(8) \qquad \alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}
\end{aligned}
$$

Olkoon $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{C}$ matriiseja ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Jos matriisien tyypit ovat sellaiset, että seuraavat tulot ovat olemassa, niin

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \\
&(2) \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} \\
&(3) \qquad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} \\
&(4) \qquad \alpha(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = (\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{B}) \\
&(5) \qquad \boldsymbol{I}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

Edellä olleet kaavat merkitsevät sitä, että matriisilausekkeita voi käsitellä hyvin samaan tapaan kuin koulussa on käsitelty x:n lausekkeita.
Kun pitää seuraavat kolme matriisilaskennan erityispiirrettä valppaasti mielessään, niin matriiseilla voi laskea kuten x:n lausekkeilla

Olkoon $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{C}$ matriiseja. Jos matriisien tyypit ovat sellaiset, että seuraavat tulot ovat olemassa, niin on mahdollista että

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad \boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA} \\
&(2) \qquad \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{BC}, \text{ vaikka } \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B} \\
&(3) \qquad \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}, \text{ vaikka } (\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0} \text{ ja } \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0})
\end{aligned}
$$

Kommentteja:

- (1) Kertolaskussa ei saa vaihtaa tekijöiden järjestystä.

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}
$$

Matriisikaavoja

(1) $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$, (2) $(\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{BC}) \not\Rightarrow (\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B})$

- (1) "Järjestys ei vaihdu!" Periaate näkyy kaavoissa. Jos $\boldsymbol{A}$ on vasemmalla LHS:ssa, niin se on vasemmalla myös RHS:ssa. Esim

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$$

- (2) "Matriisilla ei saa jakaa!" Kun koulussa on käsitelty x:n lausekkeita, on totuttu jakamaan LHS:n ja RHS:n yhteinen tekijä pois yhtälöstä. Matriisi-yhtälön kohdalla näin ei saa tehdä.

(3) $(\boldsymbol{AC} = \mathbf{0}) \not\Rightarrow (\boldsymbol{A} = \mathbf{0} \text{ tai } \boldsymbol{B} = \mathbf{0})$

- (3) "Tulon nollasääntö ei ole voimassa!"
- Esimerkiksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- On totta, että matriiseissa on jotakin erikoista, kun niiden tulo on nollamatriisi, mutta se erikoinen seikka ei ole se, että toinen niistä olisi nollamatriisi.

Määritelmä: $m \times n$ -matriisin $\boldsymbol{A}$ tarnsponoitu matriisi eli transpoosi (engl. transpose) $\boldsymbol{A}^T$ on $n \times m$ -matriisi, jolle

$$(\boldsymbol{A}^T)_{ij} = a_{ji}.$$

Transpoosi $\boldsymbol{A}^T$ saadaan siis $\boldsymbol{A}$:sta tekemällä riveistä sarakkeita.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 9 \\ 5 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(Huomaa, että lävistäjä pysyy paikallaan.)

Transpoosille on voimassa seuraavat kaavat

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad (\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A} \\
&(2) \qquad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T \\
&(3) \qquad (\alpha \boldsymbol{A})^T = \alpha \boldsymbol{A}^T \\
&(4) \qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{A}^T \qquad \text{huomaa järjestys!}
\end{aligned}
$$

Esimerkki Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Nyt

$$\begin{aligned} (AB)^T &= \left(\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 8 & 32 \\ 2 & -4 \\ -3 & 30 \end{pmatrix} \\ B^T A^T &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 32 \\ 2 & -4 \\ -3 & 30 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Reaalilukujen tapauksessa luvun $a \neq 0$ käänteisluku $1/a = a^{-1}$ on sellainen luku, että

$$a^{-1} \cdot a = 1 \quad \text{ja} \quad a \cdot a^{-1} = 1$$

(missä $1 =$ kertolaskun neutraalialkio).

Matriisin käänteismatriisilta vaaditaan täsmälleen sama ominaisuus. Asioita mutkistaa se, että kaikilla $\mathbf{0}$:sta poikkeavilla matriiseilla ei ole käänteismatriisia.

Määritelmä: Neliömatriisi $\boldsymbol{A}$ on säännöllinen, jos on olemassa käänteismatriisi $\boldsymbol{A}^{-1}$ siten, että

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}.$$

Jos $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, niin $\boldsymbol{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix}$,

sillä

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa matriisiyhtälöksi

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 1y & - & 2z & = & 7 \\ & & 2y & + & z & = & -8 \\ -1x & + & 4y & + & 3z & = & -17 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -17 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Q}\vec{x} = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{x} = \boldsymbol{Q}^{-1}\vec{b}$$

Yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2x - 1y - 2z = 7 \\ \quad\;\; 2y + z = -8 \\ -1x + 4y + 3z = -17 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Q}\vec{x} = \vec{b}$$

ratkaisu on siis

$$\vec{x} = \boldsymbol{Q}^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Kaksi kysymystä:

- (1) Mistä tietää onko kerroinkaavio säännöllinen?
- (2) Mistä saadaan käänteismatriisi?

Ensimmäinen vastaus kysymykseen (2) on seuraavassa. (Perustelu luennolla)

Matriisin $\boldsymbol{A}$ käänteismatriisin määritys:

- (1) Muodosta kaksiosainen leveä kaavio

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I})$$

  jonka vasen osa on käännettävä matriisi ja oikea puolki on saman kokoinen yksikkömatriisi.
- (2) Tee kaaviolle rivioperaatioita niin, että vasen puoli muuttuu yksikkömatriisiksi.
- (3) Kun vasen puoli on yksikkömatriisi, niin oikea puoli on $\boldsymbol{A}^{-1}$.
- (*) (Jos vaihetta (3) ei voi saavuttaa, niin matriisi ei ole säännöllinen.)

$$
\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{vaihda rivit 1 ja 3}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} \color{red}{\mathbf{-1}} & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c} \cdot 2 & \cdot(-1) \\ & \\ + & \end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -4 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \color{red}{\mathbf{2}} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c|c} + & & \\ \cdot 2 & \cdot 3.5 & \cdot 0.5 \\ & - & \end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{\mathbf{0.5}} & 1 & -3.5 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{|c|c|c} & + & \\ - & & \\ \cdot 1 & \cdot 2 & \cdot 2 \end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\
0 & 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{0.5} & 1 & -3.5 & 2
\end{array}\right)
\begin{array}{|c|c|c}
 & + & \\
- & & \\
\cdot 1 & \cdot 2 & \cdot 2
\end{array}
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 2 & -5 & 3 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 4 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -7 & 4
\end{array}\right)
$$