

Kaksirivinen determinantti

Kaksirivinen determinantti

Kolmirivinen determinantti

Determinantin yleinen kehittäminen

Determinantin ominaisuuksia

Nimityksiä tulevaa varten

## Aiheet

Kaksirivinen  
determinantti

Kaksirivinen  
determinantti

Kolmirivinen  
determinantti

Determinantin  
yleinen  
kehittäminen

Determinantin  
ominaisuuksia

Nimityksiä  
tulevaa varten

$2 \times 2$ -matriisin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

determinantti on

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Esim. Jos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

niin

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10.$$

Aiheet

Kaksirivinen  
determinantti

Kaksirivinen  
determinantti

Kolmirivinen  
determinantti

Determinantin  
yleinen  
kehittäminen

Determinantin  
ominaisuuksia

Nimityksiä  
tulevaa varten

Tarkastellaan esimerkkinä yhtälöparia

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari yhteenlaskukeinolla eliminoimalla muuttuja  $y$ .

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & \cdot a_{22} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & \cdot (-a_{12}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = a_{22}b_1 \\ -a_{12}a_{21}x - a_{12}a_{22}y = -a_{12}b_2 \\ \hline (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \end{array}$$

Aiheet

Kaksirivinen  
determinantti

Kaksirivinen  
determinantti

Kolmirivinen  
determinantti

Determinantin  
yleinen  
kehittäminen

Determinantin  
ominaisuuksia

Nimityksiä  
tulevaa varten

## JOHTOPÄÄTÖS:

Kahden yhtälön ja kahden muuttujan yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu, jos ja vain jos

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0.$$

Aiheet

Kaksirivinen  
determinanttiKaksirivinen  
determinanttiKolmirivinen  
determinanttiDeterminantin  
yleinen  
kehittäminenDeterminantin  
ominaisuuksiaNimityksiä  
tulevaa varten

$3 \times 3$ -matriisiin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

determinantti on

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Aiheet

Kaksirivinen  
determinantti

Kaksirivinen  
determinantti

Kolmirivinen  
determinantti

Determinantin  
yleinen  
kehittäminen

Determinantin  
ominaisuuksia

Nimityksiä  
tulevaa varten

Esimerkki

$$\begin{vmatrix} [2] & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\
 = +[2] \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

Aiheet

Kaksirivinen  
determinanttiKaksirivinen  
determinanttiKolmirivinen  
determinanttiDeterminantin  
yleinen  
kehittäminenDeterminantin  
ominaisuuksiaNimityksiä  
tulevaa varten

Esimerkki

$$\begin{vmatrix} 2 & [3] & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\
 = +2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - [3] \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

Aiheet

Kaksirivinen  
determinanttiKaksirivinen  
determinanttiKolmirivinen  
determinanttiDeterminantin  
yleinen  
kehittäminenDeterminantin  
ominaisuuksiaNimityksiä  
tulevaa varten

Esimerkki

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & [1] \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\ = +2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + [1] \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

Aiheet

Kaksirivinen  
determinanttiKaksirivinen  
determinanttiKolmirivinen  
determinanttiDeterminantin  
yleinen  
kehittäminenDeterminantin  
ominaisuuksiaNimityksiä  
tulevaa varten

## Esimerkki

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\
 = & +2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} \\
 = & 2 \cdot (5 \cdot 7 - 0 \cdot (-6)) - 3 \cdot (0 \cdot 7 - 0 \cdot 4) + 1 \cdot (0 \cdot (-6) - 5 \cdot 4) \\
 = & 2 \cdot (35 - 0) - 3 \cdot (0 - 0) + 1 \cdot (0 - 20) \\
 = & 70 - 0 - 20 = 50
 \end{aligned}$$

Aiheet

Kaksirivinen  
determinanttiKaksirivinen  
determinanttiKolmirivinen  
determinanttiDeterminantin  
yleinen  
kehittäminenDeterminantin  
ominaisuuksiaNimityksiä  
tulovaa varten

Determinantti voidaan kehittää minkä tahansa rivin tai sarakkeen suhteen.

Merkit pitää katsoa kaaviosta

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Aiheet

Kaksirivinen  
determinantti

Kaksirivinen  
determinantti

Kolmirivinen  
determinantti

**Determinantin  
yleinen  
kehittäminen**

Determinantin  
ominaisuuksia

Nimityksiä  
tulevaa varten

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Esimerkki: Kehitetään edellisen esimerkin determinantti kehittämällä se toisen rivin suhteen

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ [0] & 5 & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\ = -[0] \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

Aiheet

Kaksirivinen  
determinantti

Kaksirivinen  
determinantti

Kolmirivinen  
determinantti

**Determinantin  
yleinen  
kehittäminen**

Determinantin  
ominaisuuksia

Nimityksiä  
tulevaa varten

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Esimerkki: Kehitetään edellisen esimerkin determinantti kehittämällä se toisen rivin suhteen

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & [5] & 0 \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\ = -0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} + [5] \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

Aiheet

Kaksirivinen  
determinanttiKaksirivinen  
determinanttiKolmirivinen  
determinanttiDeterminantin  
yleinen  
kehittäminenDeterminantin  
ominaisuuksiaNimityksiä  
tulevaa varten

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Esimerkki: Kehitetään edellisen esimerkin determinantti kehittämällä se toisen rivin suhteen

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & [0] \\ 4 & -6 & 7 \end{vmatrix} \\ = & -0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - [0] \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} \\ = & -0 + 5 \cdot (14 - 4) - 0 = 50 \end{aligned}$$

Aiheet

Kaksirivinen  
determinanttiKaksirivinen  
determinanttiKolmirivinen  
determinanttiDeterminantin  
yleinen  
kehittäminenDeterminantin  
ominaisuuksiaNimityksiä  
tulevaa varten

- ▶  $\det(I) = 1$ .
- ▶ Neliömatriisi  $\mathbf{A}$  on säännöllinen (eli on olemassa käänteismatriisi  $\mathbf{A}^{-1}$ ), jos ja vain jos  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
- ▶  $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$
- ▶  $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$

## Aiheet

Kaksirivinen  
determinanttiKaksirivinen  
determinanttiKolmirivinen  
determinanttiDeterminantin  
yleinen  
kehittäminenDeterminantin  
ominaisuuksiaNimityksiä  
tulevaa varten

- ▶ Jos kaaviossa vaihdetaan kaksi riviä (tai saraketta) keskenään, niin uuden kaavion determinantti on alkuperäisen kaavion determinantin vastaluku
- ▶ Jos kaaviossa on nollarivi (tai nollasarake), niin kaavion determinantin arvo on 0
- ▶ Jos jokin kaavion rivi lisätään reaaliluvulla kerrottuna kaavion toiseen riviin, niin uuden kaavion determinantin arvo on sama kuin alkuperäisen kaavion determinantin arvo (sama pätee sarakkeille)
- ▶ Kolmiomuodossa olevan kaavion determinantti on diagonaali-alkioiden tulo.

Aiheet

Kaksirivinen  
determinantti

Kaksirivinen  
determinantti

Kolmirivinen  
determinantti

Determinantin  
yleinen  
kehittäminen

Determinantin  
ominaisuuksia

Nimityksiä  
tulevaa varten

$$\text{Matriisi} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alimatriisi} = \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Minori} = \det(\mathbf{A}_{12}) = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 30$$

$$\text{Kofaktori} = (-1)^{1+2} \det(\mathbf{A}_{12}) = -30$$

Aiheet

Kaksirivinen  
determinanttiKaksirivinen  
determinanttiKolmirivinen  
determinanttiDeterminantin  
yleinen  
kehittäminenDeterminantin  
ominaisuuksiaNimityksiä  
tulevaa varten