

Talousmatematiikan perusteet, L2

orms.1030 Vaasan yliopisto / kevät 2011

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen asteen yhtälö

Toisen asteen yhtälö

Epäyhtälöt

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Laskutoimitukset tehdään seuraavassa järjestyksessä

1. Sulkujen sisällä olevat lausekkeet (alkaen sisältä ulospäin)
2. potenssit ja juurilausekkeet
3. kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle
4. yhteen- ja vähennyslasku vasemmalta oikealle.

$$\begin{aligned}(5^2 - (4 + 3))/3 * 2 - 1 &= (5^2 - 7)/3 * 2 - 1 \\ &= (25 - 7)/3 * 2 - 1 \\ &= 18/3 * 2 - 1 \\ &= 6 * 2 - 1 \\ &= 12 - 1 \\ &= 11\end{aligned}$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Laskujärjestys

harjoitus 1:

Laske seuraavien lausekkeiden arvot:

$$2 * (2 + 4) / (5 - 2) =$$

$$((10 - 6/2) + 1) * 4 - 1 =$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Laskujärjestys

harjoitus 1:

Laske seuraavien lausekkeiden arvot:

$$\begin{aligned}2 \cdot (2 + 4) / (5 - 2) &= 2 \cdot 6 / 3 \\ &= 12 / 3 \\ &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((10 - 6/2) + 1) \cdot 4 - 1 &= ((10 - 3) + 1) \cdot 4 - 1 \\ &= (7 + 1) \cdot 4 - 1 \\ &= 8 \cdot 4 - 1 \\ &= 32 - 1 = 31\end{aligned}$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

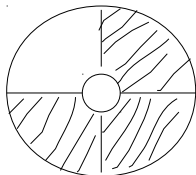
Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

wiki-materiaalia: [linkki](#)

Murtoluvun Merkitys: $\frac{m}{n}$ on luku, joka saadaan kun ykkösen jaetaan n :ään yhtäsuureen osaan, ja näitä osia otetaan m kappaletta

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.25 + 0.25 + 0.25 = 0.75$$



Viivan alla: NIMITTÄJÄ = 4
= miten moneen slice-palaan piza jaetaan

Viivan päällä: OSOITTAJA = 3
= miten monta slice-palaa otetaan

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

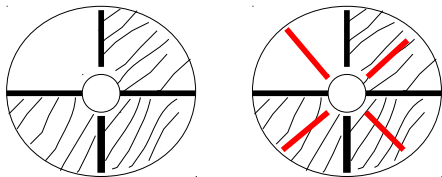
Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Murtoluvut

Laventaminen

Murtoluvun saa laventaa ilman sen merkityksen muuttumista. Laventamisessa osoittaja ja nimittäjä kerrotaan samalla luvulla (tavallisesti pienellä kokonaisluvulla).



$$2) \quad \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{6}{8}$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Murtoluvut

Supistaminen

Supistamisessa osoittaja ja nimittäjä jaetaan samalla luvulla (tavallisesti pienellä kokonaisluvulla).

$$\frac{6}{10} \stackrel{(2)}{=} \frac{6/2}{10/2} = \frac{3}{5}$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Murtoluvut

Yhteen- ja vähennyslasku

Ennen yhteen- tai vähennyslaskua murtoluvut tulee laventamalla tai supistamalla tehdä saman-nimisiksi

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} + \frac{3}{4} &= \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 4} \\ &= \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \frac{13}{12}\end{aligned}$$

Edellä saatu tulos $13/12$ voidaan myös ilmoittaa **sekalukuna**

$$\frac{13}{12} = 1\frac{1}{12} \quad \left(1\frac{1}{12} = 1 + \frac{1}{12} = \frac{12}{12} + \frac{1}{12}\right)$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Murtoluvut

Kerto- ja jakolasku

Katso [Wiki](#).

Kertolaskussa osoittajat kerrotaan ja nimittäjät kerrotaan

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Jakolaskussa jaettava murtoluku kerrotaan jakajan käänteisluvulla

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Murtoluvut

Kerto- ja jakolasku

Kun kokonaisluvulla kerrotaan, niin kertoja menee viivan päälle

$$2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Kun murtoluku jaetaan kokonaisluvulla, niin jakaja menee viivan alle

$$\frac{2}{3} : 2 = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Kokonaisluku voidaan aina tulkita murtolukuna

$$5 = \frac{5}{1}$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Laske seuraavat laskut ensin kynällä ja paperilla ja sitten laskimella:

a)

$$\left(2 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) \cdot 3 =$$

b)

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) =$$

c)

$$\frac{1 + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{4}} =$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Laske seuraavat laskut ensin kynällä ja paperilla ja sitten laskimella:

a)

$$\left(2 \cdot \frac{1}{3} - 1\right) \cdot 3 = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{3}\right) \cdot 3 = \frac{-1}{3} \cdot 3 = -1$$

b)

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$$

c)

$$\frac{1 + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{4}} = \left(\frac{4}{3}\right) / \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Prosentti tarkoittaa yhtä sadasosaa (latinaksi 'pro centum', englanniksi 'per cent', espanjaksi 'por ciento'). p prosenttia, $p\%$, on p sadasosaa. Seuraavat lauseet sanovat siis saman asian.

- ▶ "Maksu on 5 prosenttia 600 eurosta."
- ▶ "Maksu on 5 sadasosaa 600 eurosta."
- ▶ "Maksu on $5 \cdot \frac{600\text{€}}{100}$."
- ▶ "Maksu on $\frac{5}{100} \cdot 600\text{€}$."

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Jos b on $p\%$ luvusta a , eli

$$b = \frac{p}{100} \cdot a$$

niin

- ▶ a = perusarvo (Mihin verrataan?) (Minkä sadasosista on kysymys.)
- ▶ p = prosenttiluku (Miten monta sadasosaa?)
- ▶ b = prosenttiarvo (Mitä verrataan?)

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Prosentti, kahden luvun vertailu

Jos y on $p\%$ suurempi kuin x , niin

- ▶ perusarvo on x (kuin sanan perästä)
- ▶ prosenttiluku on p
- ▶ prosenttiarvo on ero $= y - x$

$$y - x = \frac{p}{100}x \quad \Leftrightarrow \quad y = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x$$

Jos y on $p\%$ pienempi kuin x , niin

- ▶ perusarvo on x (kuin sanan perästä)
- ▶ prosenttiluku on p
- ▶ prosenttiarvo on ero $= x - y$

$$x - y = \frac{p}{100}x \quad \Leftrightarrow \quad y = \left(1 - \frac{p}{100}\right)x$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Prosentti, arvon muutos

Jos muuttujan x arvo muuttuu, niin merkitsemme alkuperäistä arvoa x_0 :lla ja muuttunutta arvoa x_1 :llä.

Jos x kasvaa $p\%$, niin

- ▶ perusarvo on x_0 (arvo ennen muutosta)
- ▶ prosenttiluku on p
- ▶ prosenttiarvo on ero $= x_1 - x_0$

$$x_1 - x_0 = \frac{p}{100}x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x_0$$

Jos x_0 on $p\%$ y_0 :stä ja x kasvaa $d\%$ -yksikköä, niin

x_1 on $(p + d)\%$ y_1 :stä.

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Kertausta

Kreikkalaiset aakkoset

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

Peruslaskenta

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttajat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

	engl.	(lukuohje)		engl.	(lukuohje)
A	α	alpha (alffa)	N	ν	nu (nyy)
B	β	beta (beetta)	Ξ	ξ	xi (ksii)
Γ	γ	gamma (gamma)	O	o	omicron (omiikron)
Δ	δ	delta (delтта)	Π	π	pi (pii)
E	ϵ, ε	epsilon (epsilon)	P	ρ	rho (roo)
Z	ζ	zeta (zeetta)	Σ	σ	sigma (sigma)
H	η	eta (eetta)	T	τ	tau (tau)
Θ	θ, ϑ	theta (theetta)	Υ	υ	upsilon (ypsilon)
I	ι	iota (iootta)	Φ	ϕ, φ	phi (fii)
K	κ	kappa (kappa)	X	χ	chi (khii)
Λ	λ	lambda (lamda)	Ψ	ψ	psi (psii)
M	μ	mu (myy)	Ω	ω	omega (oomega)

Binomikaavat

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

pitää muistaa, että tarvittaessa osaa käyttää

Lausu: "Summan neliö = ensimmäisen neliö + 2 × tulo + toisen neliö"

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Potenssikaavat

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \forall b \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Potenssikaavat sopimukset

$$a^0 = 1, \forall a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \forall a \neq 0$$

kannattaa erityisesti muistaa:

$$\sqrt{a} = a^{1/2}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Itseisarvo

Määritelmä

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kun } a \geq 0, \\ -a, & \text{kun } a \leq 0. \end{cases}$$

Usein sovellustilanne on seuraava

$$\begin{aligned} |U - 5.00| &\leq 0.01 \\ \Leftrightarrow -0.01 \leq U - 5.00 &\leq 0.01 \\ \Leftrightarrow 4.99 \leq U &\leq 5.01 \end{aligned}$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

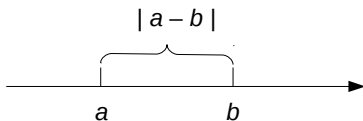
Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Kertausta

Itseisarvo

Kahden luvun erotuksen itseisarvo on niiden etäisyys lukusuoralla



Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Neliöjuurikaavat reaaliluvuille

$$(1) \quad b = \sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad (a \geq 0) \text{ ja } (b \geq 0) \text{ ja } (b^2 = a)$$

$$(2) \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$(3) \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$(4) \quad (\sqrt{a})^2 = a$$

$$(5) \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$(6) \quad b = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a$$

$$(7) \quad \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Kertausta

Joukko-oppia

- ▶ Jos a on joukon A alkio, niin merkitsemme $a \in A$
- ▶ Jos a ei ole joukon A alkio, niin merkitsemme $a \notin A$
- ▶ Joukon voi määritellä luettelemalla $A = \{1, 2, 3, 4\}$,
 $B = \{1, 2, \dots, 100\}$
- ▶ Jos alkioita on paljon, käytämme notaatiota
Joukko = $\{x \in \text{perusjoukko} \mid \text{ehto}\}$
- ▶ Esimerkiksi nollan ja yhden välissä olevien reaalilukujen joukko on
 $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
- ▶ Jos kahdella joukolla A ja B on täsmälleen samat alkiot, ne ovat *identtiset* ja merkitsemme $A = B$. Muussa tapauksessa $A \neq B$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

- ▶ Jos jokainen A :n alkio on myös B :n alkio, niin sanomme että A on B :n osajoukko ja merkitsemme $A \subseteq B$
- ▶ Jos A on B :n osajoukko ja B :ssä on alkio, jota ei ole A :ssa, niin sanomme, että A on B :n aito osajoukko ja merkitsemme $A \subset B$
- ▶ Tyhjä joukko $\emptyset = \{ \}$ on joukko, jossa ei ole yhtään alkioita.

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Perusjoukot

- ▶ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ = luonnollisten lukujen joukko
- ▶ $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ = kokonaislukujen joukko
- ▶ $\mathbb{Q} = \{x \mid x = m/n, n \neq 0, m, n \in \mathbb{Z}\}$ = rationaalilukujen joukko
- ▶ \mathbb{R} = reaalilukujen joukko
- ▶ \mathbb{C} = kompleksilukujen joukko

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

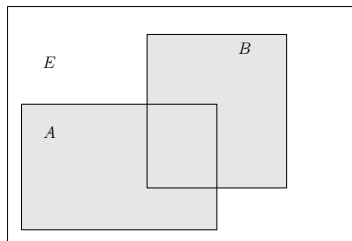
Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Joukkojen A ja B **yhdiste** (union) on joukko

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}.$$



Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

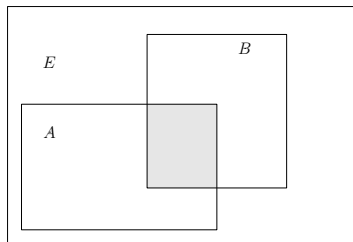
Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Joukkojen A ja B **leikkaus** (intersection) on joukko

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}.$$



Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

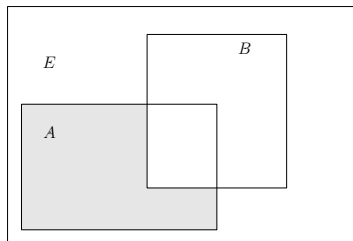
Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Joukkojen A ja B **erotus** (difference) on joukko

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ja } x \notin B\}.$$



Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

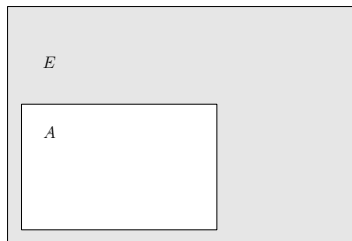
Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Joukon A **komplementti** (complement) on joukko

$$\bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$



Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Muuttujat ja lausekkeet

- ▶ Muuttuja viittaa mitattavissa olevan suureen arvoon eli mittalukuun ja yksikköön. Muuttujaa merkitään kirjaimella
- ▶ Koulukurssissa muuttuja on melkein aina x , mutta jatkossa muuttujan nimi voi olla melkein mikä tahansa kirjain.
- ▶ Aina ei tarvitse käyttää muuttujaa, mutta usein sen käyttö kannattaa:

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

- ▶ Muuttujaa käytetään, kun halutaan sanoa jotakin hyvin yleistä

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

- ▶ Kun käytämme muuttujaa, voidaan sen arvoon viitata jo ennen sen arvon selviämistä. (ANALYYSI)
- ▶ Jos ongelmalle on useita ratkaisuja, ja se ratkaistaan ”suoraan laskemalla” tai kokeilemalla, jää osa ratkaisuista helposti havaitsematta.

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

- ▶ **Yhtälö** on kahden lausekkeen välille merkitty yhtäsuuruus.
- ▶ Se luku, joka muuttujan paikalle sijoitettuna tekee yhtälöstä toden on yhtälön **juuri** (root).
- ▶ Yhtälöllä voi olla monta juurta. Kaikki yhtälön juuret muodostavat yhtälön ratkaisujoukon R_j .

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Esimerkki

$$\begin{array}{lcl} 2(x^2 - x) & \neq & x(x + 1) \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2x & \neq & x^2 + x \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x & = & 0 \\ \Leftrightarrow x(x - 3) & = & 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 & \text{tai} & x = 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{sulut pois} \\ \text{kaikki termit vasemmalle} \\ \text{tulomuotoon} \\ \text{osataan kirjoittaa vastaus} \end{array} \right.$$

Vastaus voidaan kirjoittaa johonkin seuraavista muodoista

- ▶ "Juuri on 0 tai 3"
- ▶ $x = 0$ tai $x = 3$
- ▶ "Juuret ovat 0 ja 3"
- ▶ $x_1 = 0$ ja $x_2 = 3$
- ▶ "Ratkaisujoukko on $\{0, 3\}$ "
- ▶ $R_j = \{0, 3\}$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Jos yhtälöllä ei ole juuria, sanomme sen jollakin seuraavista tavoista

- ▶ "Yhtälöllä ei ole juuria"
- ▶ "Ratkaisujoukko on tyhjä"
- ▶ $R_j = \emptyset$
- ▶ "Yhtälö on identtisesti epätosi"

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Kertausta

Yhtälö ja lauseke

Opettele erottamaan (jälkien perusteella) yhtälön ratkaisu ja lausekkeen sievennys toisistaan.

Yhtälön ratkaisu etenee rivi riviltä alaspäin.

Lausekkeen sieventäminen etenee pitkin riviä. Jos tila loppuu rivillä, niin jatkamme seuraavalle riville edellisen rivin yhtäsuuruus-merkin kohdasta alkaen.

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Kertausta

Yhtälö ja lauseke

Esimerkki 1:

$$\begin{aligned}2x - 3 &= \frac{x + 6}{2} \\ \Leftrightarrow 4x - 6 &= x + 6 \\ \Leftrightarrow 3x &= 12 \\ \Leftrightarrow x &= 4\end{aligned}$$

Esimerkki 2:

$$\begin{aligned}(2a + x)^2 - (x^2 + a^2) &= (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot x + x^2 - x^2 - a^2 \\ &= 4a^2 + 4ax - a^2 = 3a^2 + 4ax \\ &= a(3a - 4x)\end{aligned}$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Kertausta

Ensimmäisen asteen yhtälö

Ensimmäisen asteen yhtälön muokkauksen perusaskleet

1. termi saa vaihtaa puolta, jos se samalla vaihtaa merkkiä

$$5x = 4x + 2$$

$$5x - 4x = 2$$

2. yhtälön saa jakaa nolasta eroavalla luvulla (kaikki termit)
3. yhtälön saa kertoa nolasta eroavalla luvulla (kaikki termit)

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Kertausta

Ensimmäisen asteen yhtälö

Esimerkki 1

$$5(x - 1) = x + 7$$

$$5x - 5 = x + 7$$

$$5x - x = 7 + 5$$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

Esimerkki 2

$$\frac{2x + 1}{2} + 1 = x$$

$$2x + 1 + 2 = 2x$$

$$2x - 2x = -1 - 2$$

$$0 = -3 \quad \text{epätosi } \forall x$$

$$R_j = \emptyset$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Kertausta

Toisen asteen yhtälö

Toisen asteen yhtälö viedään ensin perusmuotoon

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Reaalijuuria on 0, 1 tai 2 kappaletta. Ne saadaan ratkaisukaavalla

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ratkaisukaavan eliöjuuren sisällä oleva osa on **Diskriminantti**.
Diskriminantin D merkki määrää reaali-juurten lukumäärän

$D > 0 \Rightarrow$ kaksi reaalijuurta,

$D = 0 \Rightarrow$ yksi reaalijuuri,

$D < 0 \Rightarrow$ ei yhtään reaalijuurta.

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Kertausta

Toisen asteen yhtälö

Ratkaisukaava tulee osata. Aluksi kannattaa katsoa, missä se on taulukkokirjassa.

Toistojen kautta sen oppii lopulta ulkoa.

Jos yhtälö on muodossa, jossa LHS on tulomuodossa ja RHS=0, niin kannattaa käyttää periaatetta, jonka mukaan tulo on nolla, jos ainakin yksi tulon tekijöistä on nolla

Esimerkki

$$5(x - 2)(9 - 4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2 = 0) \text{ tai } (9 - 4x = 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ tai } x = 9/4$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Kertausta

Toisen asteen yhtälö

Seuraavassa puolestaan tulee toimia eri tavalla, kuin edellä

$$\begin{aligned}5(x - 2)(9 - 4x) &= 1 && | : 5 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(9 - 4x) &= 0.2 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 17x - 18.2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 4 \cdot 18.2}}{2 \cdot 4} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-17 \pm \sqrt{-2.2}}{8}\end{aligned}$$

Siis yhtälön ratkaisujoukko on tyjä ($R_j = \emptyset$).

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Ensimmäisen asteen epäyhtälön käsittelyn perussääntö on, että kerrottaessa (tai jaettaessa) epäyhtälö negatiivisella luvulla, erisuuruus-merkki kääntyy

Esimerkki 1

$$4 - 3(x - 3) \leq 25$$

$$4 - 3x + 9 \leq 25$$

$$-3x \leq 25 - 4 - 9$$

$$-3x \leq 12 \quad | : (-3)$$

$$x \geq -4$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Esimerkki 2

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{2} + 1 &\geq x && | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow 2x + 1 + 2 &\geq 2x \\ \Leftrightarrow 0 &\geq -3 && \text{(totta!)} \\ \Leftrightarrow R_j &= \mathbb{R}\end{aligned}$$

Epäyhtälö on siis tosi kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

Kertausta

Epäyhtälöt

- ▶ epäyhtälöä ei saa jakaa tai kertoa x :n lausekkeella. (poikkeus $x^2 + 1$ yms.)
- ▶ jos kerrotaan tai jaetaan kirjainvaki-olla, niin on oltava huolellinen.

Esimerkki

$$\begin{aligned}ax - 5 &< 2x \\ \Leftrightarrow ax - 2x &< 5 \\ \Leftrightarrow (a - 2)x &< 5 \quad | : (a - 2)\end{aligned}$$

Jatko riippuu vakion a arvosta

Jos $a > 2$, niin	Jos $a > 2$, niin	Jos $a = 2$, niin
$x < \frac{5}{a-2}$	$x > \frac{5}{a-2}$	$2x - 5 < 2x$
		on tosi kaikilla x

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

- ▶ Toisen asteen epäyhtälöön palaamme funktioiden jälkeen.
- ▶ Itseisarvoepäyhtälöt
- ▶ Murtoepäyhtälöt

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt

(1) Sievennä lausekkeet

$$\text{a) } \frac{3^4}{(2 \cdot 3)^2} \quad \text{b) } \sqrt{1 - \frac{16}{25}} \quad \text{c) } \frac{2x^2 - 4x}{2x}$$

(2) Ratkaise yhtälöt

$$\text{a) } 5 - 2(x - 2) = x + 10 \quad \text{b) } x(x - 3) = 4$$

(3) Ratkaise epäyhtälö

$$3\left(1 - \frac{x}{2}\right) < 5$$

(4) Laske laskimella

$$\text{a) } \sqrt[4]{81} = \quad \text{b) } 100^{1.5} = 100^{3/2} =$$

Aiheet

Laskujärjestys

Murtoluvut

prosentti

Kerrattavia
kaavoja

Joukko-oppia

Muuttujat ja
lausekkeet

Yhtälö

Ensimmäisen
asteen yhtälö

Toisen asteen
yhtälö

Epäyhtälöt