

Funktiot

Kauhava 26.11.2010

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Linkkejä

- ▶ [kurssi2](#) / Etälukio (edu.fi)
 - ▶ [kurssi8](#) / Etälukio (edu.fi)
- (Suurinta osaa tämän linkin takana olevasta materiaalista pohdimme vasta huomenna!)

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Funktio (Käytännöllinen määritelmä)

Jos $y = f(x) = x^2 - 2x$, niin sanomme, että

” y on funktion f arvo kohdassa x ”.

Saadaksemme paremman kuvan funktiosta laskemme sen arvoja useassa kohdassa

x	$y = f(x) = x^2 - 2x$	(x, y)
-2	$(-2)^2 - 2 \cdot (-2) = 8$	$(-2, 8)$
-1	$(-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 3$	$(-1, 3)$
0	$0^2 - 2 \cdot 0 = 0$	$(0, 0)$
1	$1^2 - 2 \cdot 1 = -1$	$(1, -1)$
2	$2^2 - 2 \cdot 2 = 0$	$(2, 0)$
3	$3^2 - 2 \cdot 3 = 3$	$(3, 3)$
4	$4^2 - 2 \cdot 4 = 8$	$(4, 8)$

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

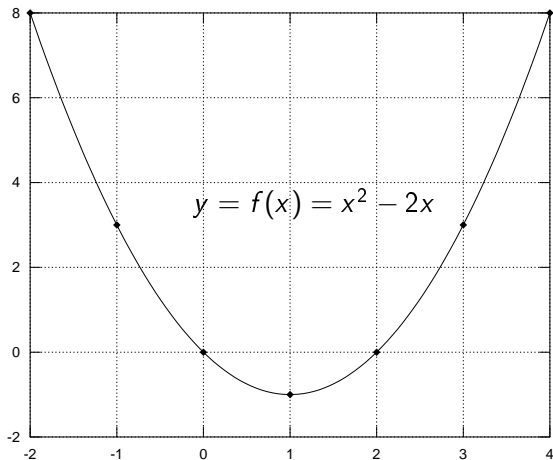
Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Funktion kuvaaja



(x, y)
$(-2, 8)$
$(-1, 3)$
$(0, 0)$
$(1, -1)$
$(2, 0)$
$(3, 3)$
$(4, 8)$

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Edellisen funktion nollakohdat ovat ne kohdat, joissa funktio saa arvon nolla. Nollakohdat ratkaistaan seuraavasti:

$$f(x) = 0 \quad (\text{otsikko-yhtälö})$$

Aiheet

Funktio ja
funktion kuvaaja

Funktion
kasvaminen ja
väheneminen

Funktio ja
kuvaus

Yhdistetty
funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Edellisen funktion nollakohdat ovat ne kohdat, joissa funktio saa arvon nolla. Nollakohdat ratkaistaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{(otsikko-yhtälö)} \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x &= 0 && \text{(mitä se tarkoittaa)} \end{aligned}$$

Aiheet

Funktio ja
funktion kuvaaja

Funktion
kasvaminen ja
vähentyminen

Funktio ja
kuvaus

Yhdistetty
funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Edellisen funktion nollakohdat ovat ne kohdat, joissa funktio saa arvon nolla. Nollakohdat ratkaistaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 && \text{(otsikko-yhtälö)} \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x &= 0 && \text{(mitä se tarkoittaa)} \\ \Leftrightarrow x(x - 2) &= 0\end{aligned}$$

Aiheet

Funktio ja
funktion kuvaaja

Funktion
kasvaminen ja
väheneminen

Funktio ja
kuvaus

Yhdistetty
funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Edellisen funktion nollakohdat ovat ne kohdat, joissa funktio saa arvon nolla. Nollakohdat ratkaistaan seuraavasti:

$$f(x) = 0 \quad (\text{otsikko-yhtälö})$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \quad (\text{mitä se tarkoittaa})$$

$$\Leftrightarrow x(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } x = 2 \quad (\text{juuret})$$

Aiheet

Funktio ja
funktion kuvaaja

Funktion
kasvaminen ja
väheneminen

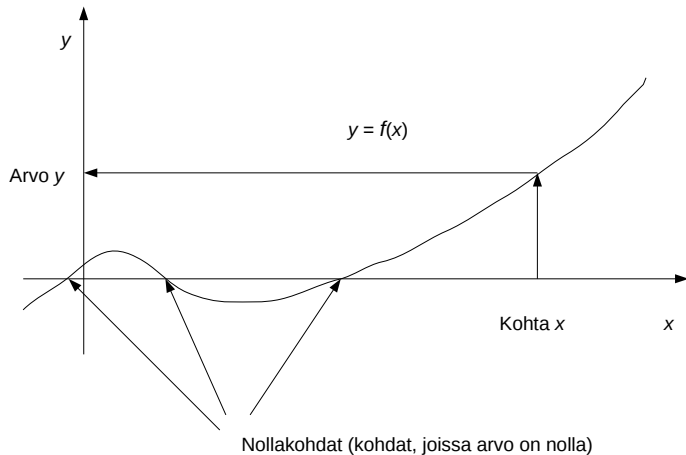
Funktio ja
kuvaus

Yhdistetty
funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Funktion kuvaaja



Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

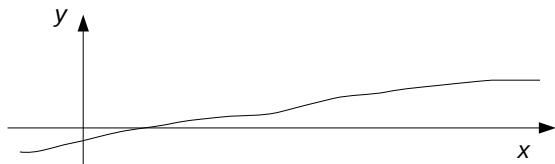
Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Funktion kasvaminen



Funktio $f(x)$ on välillä (a, b) **kasvava**, jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

Aiheet

Funktio ja
funktion kuvaaja

Funktion
kasvaminen ja
vähentyminen

Funktio ja
kuvaus

Yhdistetty
funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Funktion kasvaminen



Funktio $f(x)$ on välillä (a, b) **kasvava**, jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

Funktio $f(x)$ on välillä (a, b) **aidosti kasvava**, jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

Aiheet

Funktio ja
funktion kuvaaja

Funktion
kasvaminen ja
vähentyminen

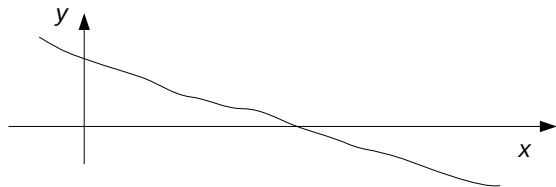
Funktio ja
kuvaus

Yhdistetty
funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Funktion väheneminen



Funktio $f(x)$ on välillä (a, b) **vähenevä**, jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

Aiheet

Funktio ja
funktion kuvaaja

Funktion
kasvaminen ja
väheneminen

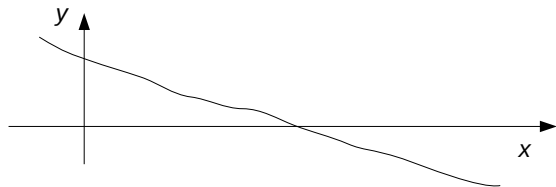
Funktio ja
kuvaus

Yhdistetty
funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Funktion väheneminen



Funktio $f(x)$ on välillä (a, b) **vähenevä**, jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

Funktio $f(x)$ on välillä (a, b) **aidosti vähenevä**, jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

Aiheet

Funktio ja
funktion kuvaaja

Funktion
kasvaminen ja
väheneminen

Funktio ja
kuvaus

Yhdistetty
funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Funktion väheneminen



Funktio $f(x)$ on välillä (a, b) **vähenevä**, jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

Funktio $f(x)$ on välillä (a, b) **aidosti vähenevä**, jos

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

Funktio $f(x)$ on välillä (a, b) **monotoninen**, jos se on kasvava tai vähenevä välillä (a, b) .

Aiheet

Funktio ja
funktion kuvaaja

Funktion
kasvaminen ja
väheneminen

Funktio ja
kuvaus

Yhdistetty
funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Esimerkki. (a) Tarkastellaan funktiota

$$y = f(x) = x^2, \quad \text{kun } x \geq 0.$$

Haluamme osoittaa, että f on (aidosti)kasvava määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Esimerkki. (a) Tarkastellaan funktiota

$$y = f(x) = x^2, \quad \text{kun } x \geq 0.$$

Haluamme osoittaa, että f on (aidosti)kasvava määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Olkoot x_1 ja x_2 mitkä tahansa kaksi ei-negatiivista reaalilukua siten, että $x_1 < x_2$. (huom. x_2 ei voi olla 0.) Silloin on olemassa nollaa isompi luku h siten, että $x_2 = x_1 + h$.

Aiheet

Funktio ja
funktion kuvaaja

Funktion
kasvaminen ja
vähentyminen

Funktio ja
kuvaus

Yhdistetty
funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Esimerkki. (a) Tarkastellaan funktiota

$$y = f(x) = x^2, \quad \text{kun } x \geq 0.$$

Haluamme osoittaa, että f on (aidosti)kasvava määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Olkoot x_1 ja x_2 mitkä tahansa kaksi ei-negatiivista reaalilukua siten, että $x_1 < x_2$. (huom. x_2 ei voi olla 0.) Silloin on olemassa nollaa isompi luku h siten, että $x_2 = x_1 + h$.

Nyt

$$f(x_2) = x_2^2 = (x_1 + h)^2 = x_1^2 + 2hx_1 + h^2 > x_1^2 = f(x_1)$$

□

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

(b) Toinen esimerkki olkoon funktio

$$y = g(x) = x^2, \quad \text{kun } x \in \mathbb{R}.$$

Tämä funktio ei ole kasvava määrittelyjoukossaan \mathbb{R} .

Perusteluksi riittää kaksi arvoa, jotka ovat vastoin kasvamisen määritelmää.

Aiheet

Funktio ja
funktion kuvaaja

Funktion
kasvaminen ja
vähentyminen

Funktio ja
kuvaus

Yhdistetty
funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

(b) Toinen esimerkki olkoon funktio

$$y = g(x) = x^2, \quad \text{kun } x \in \mathbb{R}.$$

Tämä funktio ei ole kasvava määrittelyjoukossaan \mathbb{R} .
Perusteluksi riittää kaksi arvoa, jotka ovat vastoin kasvamisen määritelmää.

$$f(-2) = (-2)^2 = 4 > 0 = 0^2 = f(0)$$

□

Aiheet

Funktio ja
funktion kuvaaja

Funktion
kasvaminen ja
vähentyminen

Funktio ja
kuvaus

Yhdistetty
funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Lukion terminologia: maa/kurssi1/Etälukio.

Kun funktiota $y = f(x)$ käsitellessämme rajoitamme x :n arvot joukkoon A ja y :n arvot joukkoon B , niin sanomme, että

- ▶ A on funktion määrittelyjoukko ($x \in A$).
- ▶ B on funktion maalijoukko ($f(x) \in B$).
- ▶ Jos $f(x) = y$ niin sanomme, että y on x :n kuva (image), ja x on y :n alkukuva (preimage).
- ▶ Kaikki funktion kuvapistet muodostavat arvojoukon $f(A) = \{y \in B \mid y = f(x), \text{ jollakin } x \in A\}$.
 $f(A) \subseteq B$.

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

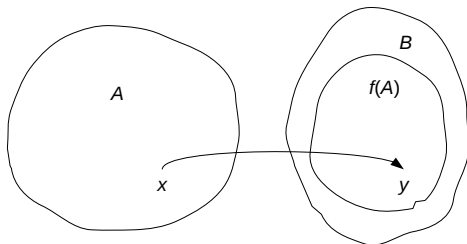
Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Kuvausmerkintä

$$f : A \rightarrow B, x \mapsto y = f(x)$$



”Tikkataulusta muistaa”, että ”arvojen tulee olla maalissa”,
ja arvojoukko voi olla aito maalijoukon osajoukko.

Aiheet

Funktio ja
funktion kuvaaja

Funktion
kasvaminen ja
vähentyminen

Funktio ja
kuvaus

Yhdistetty
funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Yhdistetty funktio

Jos kuvaukset

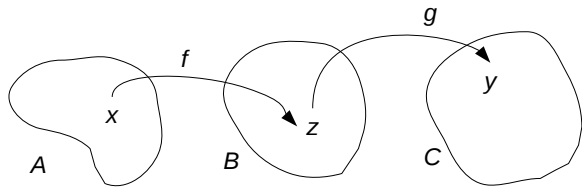
$$f : A \rightarrow B_1, \quad x \mapsto z = f(x)$$

$$g : B_2 \rightarrow C, \quad z \mapsto y = g(z)$$

ovat hyvin määriteltyjä ja $f(A) \subseteq B_2$, niin kuvaus

$$g \circ f : A \rightarrow C, x \mapsto y = g(f(x))$$

on hyvin määritelty.



Aiheet

Funktio ja
funktion kuvaaja

Funktion
kasvaminen ja
vähentyminen

Funktio ja
kuvaus

Yhdistetty
funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Yhdistetty funktio

Esimerkki. Olkoon

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty), & x \mapsto z = f(x) = x^2 + 1 \\ g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, & z \mapsto y = g(z) = \sqrt{z} \end{cases}$$

Silloin

$$g(f(x)) = g(z) = \sqrt{z} = \sqrt{x^2 + 1}.$$

yhdistetyn funktion kasvusääntö

sisäfunktio	ulkofunktio	yhdistetty f.
kasvava	kasvava	kasvava
vähenevä	kasvava	vähenevä
kasvava	vähenevä	vähenevä
vähenevä	vähenevä	kasvava

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

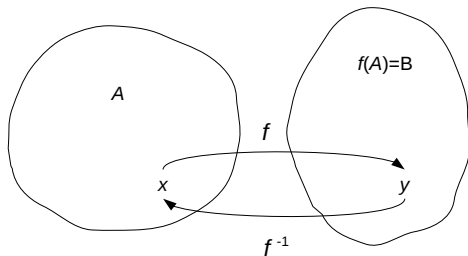
Käänteisfunktio

Testi 3

Käänteisfunktio

$$f : A \rightarrow B, x \mapsto y = f(x)$$

Jos jokainen $y \in B$ on kuva ($f(A) = B$) ja jokaisella $y \in B$ on täsmälleen yksi alkukuva ($f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$), niin "kääntämällä nuolet" saamme **käänteiskuvauksen**



$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Käänteisfunktio

Esimerkki. Olkoon $y = \frac{2x+10}{x+1} = f(x)$.

Aiheet

Funktio ja
funktion kuvaaja

Funktion
kasvaminen ja
väheneminen

Funktio ja
kuvaus

Yhdistetty
funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Käänteisfunktio

Esimerkki. Olkoon $y = \frac{2x+10}{x+1} = f(x)$.

Silloin

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x + 10}{x + 1}$$

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Käänteisfunktio

Esimerkki. Olkoon $y = \frac{2x+10}{x+1} = f(x)$.

Silloin

$$\begin{aligned}y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{2x + 10}{x + 1} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{2(x + 1) + 8}{x + 1}\end{aligned}$$

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Käänteisfunktio

Esimerkki. Olkoon $y = \frac{2x+10}{x+1} = f(x)$.

Silloin

$$\begin{aligned}y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{2x + 10}{x + 1} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{2(x + 1) + 8}{x + 1} = 2 + \frac{8}{x + 1}\end{aligned}$$

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Käänteisfunktio

Esimerkki. Olkoon $y = \frac{2x+10}{x+1} = f(x)$.

Silloin

$$\begin{aligned}y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{2x + 10}{x + 1} \\&\Leftrightarrow y = \frac{2(x + 1) + 8}{x + 1} = 2 + \frac{8}{x + 1} \\&\Leftrightarrow y - 2 = \frac{8}{x + 1}\end{aligned}$$

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Käänteisfunktio

Esimerkki. Olkoon $y = \frac{2x+10}{x+1} = f(x)$.

Silloin

$$\begin{aligned}y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{2x + 10}{x + 1} \\&\Leftrightarrow y = \frac{2(x + 1) + 8}{x + 1} = 2 + \frac{8}{x + 1} \\&\Leftrightarrow y - 2 = \frac{8}{x + 1} \\&\Leftrightarrow x + 1 = \frac{8}{y - 2}\end{aligned}$$

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Käänteisfunktio

Esimerkki. Olkoon $y = \frac{2x+10}{x+1} = f(x)$.

Silloin

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x + 10}{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2(x + 1) + 8}{x + 1} = 2 + \frac{8}{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow y - 2 = \frac{8}{x + 1}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = \frac{8}{y - 2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8}{y - 2} - 1 =$$

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Käänteisfunktio

Esimerkki. Olkoon $y = \frac{2x+10}{x+1} = f(x)$.

Silloin

$$\begin{aligned}y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{2x + 10}{x + 1} \\&\Leftrightarrow y = \frac{2(x + 1) + 8}{x + 1} = 2 + \frac{8}{x + 1} \\&\Leftrightarrow y - 2 = \frac{8}{x + 1} \\&\Leftrightarrow x + 1 = \frac{8}{y - 2} \\&\Leftrightarrow x = \frac{8}{y - 2} - 1 = \frac{10 - y}{y - 2}\end{aligned}$$

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

Käänteisfunktio

Esimerkki. Olkoon $y = \frac{2x+10}{x+1} = f(x)$.

Silloin

$$\begin{aligned}y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{2x + 10}{x + 1} \\&\Leftrightarrow y = \frac{2(x + 1) + 8}{x + 1} = 2 + \frac{8}{x + 1} \\&\Leftrightarrow y - 2 = \frac{8}{x + 1} \\&\Leftrightarrow x + 1 = \frac{8}{y - 2} \\&\Leftrightarrow x = \frac{8}{y - 2} - 1 = \frac{10 - y}{y - 2}\end{aligned}$$

Siis

$$f^{-1}(y) = \frac{10 - y}{y - 2}.$$

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3

(1) Piirrä funktion kuvaaja ja laske funktion nollakohdat:

$$\text{a) } f(x) = 2x - 8 \quad \text{b) } g(x) = x(4 - x) + 5$$

(2) Piirrä funktion kuvaaja ja laske milloin $h(x) = 30$?

$$h(q) = \frac{100}{x} + 2x.$$

(3) Millä x :n arvoilla tehtävien 1 ja 2 funktiot $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ovat kasvavia? (Vastaa piirtämäsi kuvan perusteella.)

(4) Mikä on funktion $y = f(x) = (2x + 10)^{1/2}$, $x > 0$ käänteisfunktio?

Aiheet

Funktio ja funktion kuvaaja

Funktion kasvaminen ja väheneminen

Funktio ja kuvaus

Yhdistetty funktio

Käänteisfunktio

Testi 3