Derivointikaavoja, interpolointi, jousto, rajatuotto, L4b

Derivointikaavoja

Funktioita

Potenssifunktio:

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

Potenssifunktio:

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

Eksponentin n ei tarvitse olla kokonaisluku, vaan se voi olla murtoluku tai desimaaliluku!

Potenssifunktio:

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

Eksponentin n ei tarvitse olla kokonaisluku, vaan se voi olla murtoluku tai desimaaliluku!

Neliöjuuri:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{ax} =$$

Potenssifunktio:

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

Eksponentin n ei tarvitse olla kokonaisluku, vaan se voi olla murtoluku tai desimaaliluku!

Neliöjuuri:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{ax} = \frac{d}{dx}(\sqrt{a}\sqrt{x}) =$$

Potenssifunktio:

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

Eksponentin n ei tarvitse olla kokonaisluku, vaan se voi olla murtoluku tai desimaaliluku!

Neliöjuuri:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{ax} = \frac{d}{dx}(\sqrt{a}\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(\sqrt{a}x^{1/2}) = \dots$$

Potenssifunktio:

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

Eksponentin n ei tarvitse olla kokonaisluku, vaan se voi olla murtoluku tai desimaaliluku!

Neliöjuuri:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{ax} = \frac{d}{dx}(\sqrt{a}\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(\sqrt{a}x^{1/2}) = \dots$$

Palutui edeltävään kaavaan (EI OMAA KAAVAA)

Derivointikaavoja

Funktioita

Eksponenttifunktio:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}, \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{e}^{ax} = a \cdot \mathrm{e}^{ax}$$

Derivointikaavoja

Funktioita

Eksponenttifunktio:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}, \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{e}^{ax} = a \cdot \mathrm{e}^{ax}$$

$$\left(\frac{d}{dx}a^{x} = \ln(a) \cdot \mathrm{e}^{x} \right)$$

Eksponenttifunktio:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x, \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{e}^{ax} = a \cdot \mathrm{e}^{ax}$$

$$\left(\frac{d}{dx}a^x = \ln(a) \cdot \mathrm{e}^x \right)$$

Logaritmifunktio:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d}{dx}\ln(ax) = \frac{1}{x}$$

Eksponenttifunktio:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x, \qquad \frac{d}{dx}\mathrm{e}^{ax} = a \cdot \mathrm{e}^{ax}$$

$$\left(\frac{d}{dx}a^x = \ln(a) \cdot \mathrm{e}^x\right)$$

Logaritmifunktio:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d}{dx}\ln(ax) = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}\right)$$

Derivointikaavoja
Yleisiä

Tulon derivaatta:

$$\frac{d}{dx}(f(c) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Tulon derivaatta:

$$\frac{d}{dx}(f(c) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Eli lyhyesti

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Tulon derivaatta:

$$\frac{d}{dx}(f(c) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Eli lyhyesti

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Osamäärän derivaatta:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Derivointikaavoja
Yleisiä

Tulon derivaatta:

$$\frac{d}{dx}(f(c) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Eli lyhyesti

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Osamäärän derivaatta:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Eli lyhyesti

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Derivointikaavoja

Yleisiä

Derivointikaavoja
Yleisiä

Yhdistetyn funktion derivaatta:

$$\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Yhdistetyn funktion derivaatta:

$$\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Esimerkki 1: Olkoon $\mathrm{e}^{5x} = g(f(x))$, missä

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 5 \\ g(z) &= \mathrm{e}^z \quad \longrightarrow \quad g'(z) = \mathrm{e}^z \end{aligned}$$

Yhdistetyn funktion derivaatta:

$$\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Esimerkki 1: Olkoon $\mathrm{e}^{5x} = g(f(x))$, missä

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 5 \\ g(z) &= \mathrm{e}^{z} \quad \longrightarrow \quad g'(z) = \mathrm{e}^{z} \end{aligned}$$

Silloin

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{e}^{5x}) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \mathrm{e}^{f(x)} \cdot f'(x) = \mathrm{e}^{5x} \cdot 5$$

Derivointikaavoja
Yleisiä

$$\boxed{\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Esimerkki 2: Olkoon $(5+x^2)^3 = g(f(x))$, missä

$$\begin{aligned} f(x) &= 5+x^2 \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 2x \\ g(z) &= z^3 \quad \longrightarrow \quad g'(z) = 3z^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Esimerkki 2: Olkoon $(5+x^2)^3 = g(f(x))$, missä

$$\begin{aligned} f(x) &= 5+x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x \\ g(z) &= z^3 \longrightarrow g'(z) = 3z^2 \end{aligned}$$

Silloin

$$\frac{d}{dx}((5+x^2)^3) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 3(f(x))^2 \cdot f'(x)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Esimerkki 2: Olkoon $(5+x^2)^3 = g(f(x))$, missä

$$\begin{aligned} f(x) &= 5+x^2 \quad \longrightarrow \quad f'(x) = 2x \\ g(z) &= z^3 \quad \longrightarrow \quad g'(z) = 3z^2 \end{aligned}$$

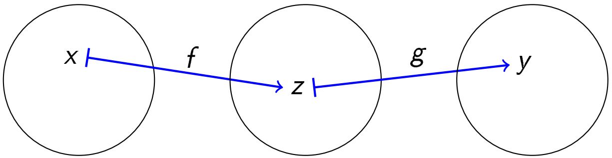
Silloin

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}((5+x^2)^3) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) = 3(f(x))^2 \cdot f'(x) \\ &= 3(5+x^2)^2 \cdot 2x = 6x(5+x^2)^2 \end{aligned}$$

Derivointikaavoja

Ketjusääntö

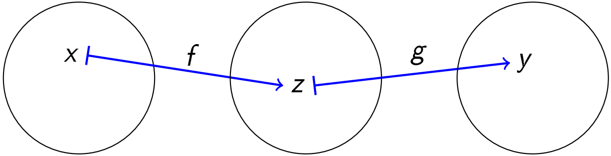
$$y = g(z) = g(f(x))$$



Derivointikaavoja

Ketjusääntö

$$y = g(z) = g(f(x))$$

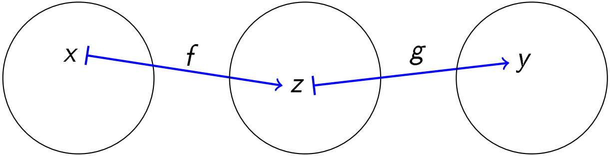


$$\frac{d}{dx}(g(f(x))) = \frac{dy}{dx}$$

Derivointikaavoja

Ketjusääntö

$$y = g(z) = g(f(x))$$

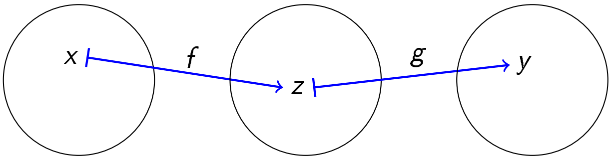


$$\frac{d}{dx}(g(f(x))) = \frac{dy}{dx} \quad = \quad \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Derivointikaavoja

Ketjusääntö

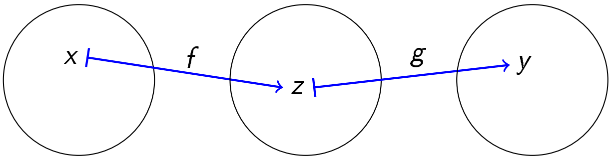
$$y = g(z) = g(f(x))$$



$$\frac{d}{dx}(g(f(x))) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$= g'(z) \cdot f'(x)$$

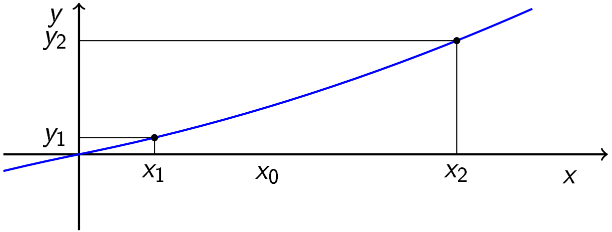
$$y = g(z) = g(f(x))$$



$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(g(f(x))) = \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} \\ &= g'(z)\cdot f'(x) = g'(f(x))f'(x)\end{aligned}$$

Interpolointi

Olkoon $y = f(x)$ funktio, jonka kuvaaja on "melkein suora". Tiedämme funktion f arvot kahdessa kohdassa: $y_1 = f(x_1)$ ja $y_2 = f(x_2)$. Haluamme arvioida (estimoida) funktion arvoa kohdassa x_0, joka on kohtien x_1 ja x_2 välissä.



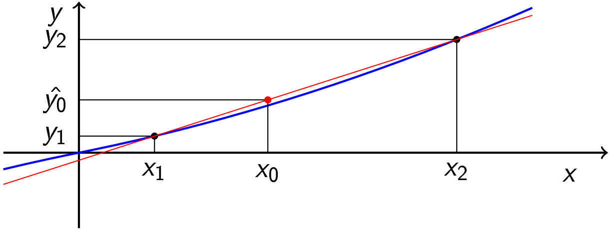
Interpolointi

Interpolointi

Piirretään suora pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta ja luetaan arvio suoralta

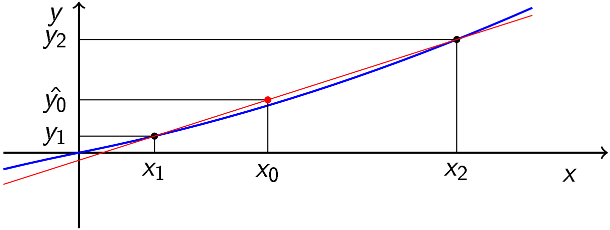
Interpolointi

Piirretään suora pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta ja luetaan arvio suoralta



Interpolointi

Piirretään suora pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) kautta ja luetaan arvio suoralta



$$\frac{\hat{y}_0 - y_1}{x_0 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\boxed{f(x_0) \approx \hat{y}_0 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1)}$$

Interpolointi

$$\boxed{f(x_0) \approx \hat{y}_0 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1)}$$

- Jos $x_1 < x_0 < x_2$, niin kaavan soveltamista sanotaan **interpoloinniksi**.
- Jos x_0 ei ole kohtien x_1 ja x_2 välissä (eli $x_0 < x_1 < x_2$ tai $x_1 < x_2 < x_0$), niin kaavan soveltamista sanotaan **ekstrapoloinniksi**.
- Kaava on sama.
- Ekstrapoloinnissa syntyvä virhe saattaa olla suuri!

Se hinta p, jolla tuotteen koko tuotanto saadaan myytyä, riippuu tuotteen tarjotusta määrästä q. Kysyntäfunktion $p = f(q)$ lauseketta ei tunneta, eikä se ole pysyvänä edes olemassa. Jos tiedämme vastaavat arvot kahdessa nykyhetkeen verrattavassa tilanteessa (q_1, p_1) ja (q_2, p_2), niin voimme estimoida kysyntäfunktiota seuraavasti.

Se hinta p, jolla tuotteen koko tuotanto saadaan myytyä, riippuu tuotteen tarjotusta määrästä q. Kysyntäfunktion $p = f(q)$ lauseketta ei tunneta, eikä se ole pysyvänä edes olemassa. Jos tiedämme vastaavat arvot kahdessa nykyhetkeen verrattavassa tilanteessa (q_1, p_1) ja (q_2, p_2), niin voimme estimoida kysyntäfunktiota seuraavasti.

Olkoon tunnetut arvot $(q_1, p_1) = (200\mathrm{kpl/kk}, 12.50€)$ ja $(q_2, p_2) = (250\mathrm{kpl/kk}, 10.00€)$. Jos $q_1 < q < q_2$, niin

$$p = f(q) \approx p_1 + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}(q - q_1)$$

Se hinta p, jolla tuotteen koko tuotanto saadaan myytyä, riippuu tuotteen tarjotusta määrästä q. Kysyntäfunktion $p = f(q)$ lauseketta ei tunneta, eikä se ole pysyvänä edes olemassa. Jos tiedämme vastaavat arvot kahdessa nykyhetkeen verrattavassa tilanteessa (q_1, p_1) ja (q_2, p_2), niin voimme estimoida kysyntäfunktiota seuraavasti.

Olkoon tunnetut arvot $(q_1, p_1) = (200\mathrm{kpl/kk}, 12.50€)$ ja $(q_2, p_2) = (250\mathrm{kpl/kk}, 10.00€)$. Jos $q_1 < q < q_2$, niin

$$
\begin{aligned}
p = f(q) &\approx p_1 + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}(q - q_1) \\
&= 12.50 + \frac{10.00 - 12.50}{250 - 200}(q - 200)
\end{aligned}
$$

Se hinta p, jolla tuotteen koko tuotanto saadaan myytyä, riippuu tuotteen tarjotusta määrästä q. Kysyntäfunktion $p = f(q)$ lauseketta ei tunneta, eikä se ole pysyvänä edes olemassa. Jos tiedämme vastaavat arvot kahdessa nykyhetkeen verrattavassa tilanteessa (q_1, p_1) ja (q_2, p_2), niin voimme estimoida kysyntäfunktiota seuraavasti.

Olkoon tunnetut arvot $(q_1, p_1) = (200\mathrm{kpl}/\mathrm{kk}, 12.50€)$ ja $(q_2, p_2) = (250\mathrm{kpl}/\mathrm{kk}, 10.00€)$. Jos $q_1 < q < q_2$, niin

$$\begin{aligned} p = f(q) &\approx p_1 + \frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1}(q - q_1) \\ &= 12.50 + \frac{10.00 - 12.50}{250 - 200}(q - 200) \\ &= 22.50 - 0.05q \end{aligned}$$

Jousto

Jos jonkin suureen (esim hinta p) arvon muuttuminen saa aikaan sen, että myös toisen suureen (esim kysyntä q) arvo muuttuu, niin kuvaamme tämän vaikutuksen voimakkuutta joustolla seuraavsti.

Aiheet
Derivointikaavoja
Interpolointi
Jousto
Rajatuotto

Jousto

Jos jonkin suureen (esim hinta p) arvon muuttuminen saa aikaan sen, että myös toisen suureen (esim kysyntä q) arvo muuttuu, niin kuvaamme tämän vaikutuksen voimakkuutta joustolla seuraavsti.

y:n jousto x:n suhteen on y:n prosenttimuutos jaettuna x:n prosenttimuutoksella.

$$jousto = \frac{(\Delta y / y) \cdot 100\%}{(\Delta x / x) \cdot 100\%} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$$

Jousto

Jos jonkin suureen (esim hinta p) arvon muuttuminen saa aikaan sen, että myös toisen suureen (esim kysyntä q) arvo muuttuu, niin kuvaamme tämän vaikutuksen voimakkuutta joustolla seuraavsti.

y:n jousto x:n suhteen on y:n prosenttimuutos jaettuna x:n prosenttimuutoksella.

$$jousto = \frac{(\Delta y/y)\cdot 100\%}{(\Delta x/x)\cdot 100\%} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}$$

Kysynnän hintajousto (price elasticity of demand) on siis

$$jousto = \frac{q\text{: n }\% - \text{muutos}}{p\text{: n }\% - \text{muutos}} = \frac{\Delta q}{\Delta p}\cdot\frac{p}{q}$$

Jousto

Esimerkki. Tuotteen kysynnän hintajousto on -1.5. Hinta on nyt $p = 25.00$ € /kpl ja kysyntä on nyt $q = 2200$kpl/kk. Miten paljon kysyntä muuttuu, jos hinta nostetaan 28.00 euroon kappaleelta.

Jousto

Esimerkki. Tuotteen kysynnän hintajousto on -1.5. Hinta on nyt $p = 25.00$ € /kpl ja kysyntä on nyt $q = 2200$kpl/kk. Miten paljon kysyntä muuttuu, jos hinta nostetaan 28.00 euroon kappaleelta.

$$
\begin{aligned}
p &= 25.00\,€\ /\mathrm{kpl} \\
\Delta p &= 28.00\,€\ - 25.00\,€\ = +3.00\mathrm{euro} \\
q &= 2200\mathrm{kpl}/\mathrm{kk} \\
\Delta q &= x \\
\mathrm{jousto} &= -1.5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} &= \mathrm{jousto} \\
\Leftrightarrow \frac{x}{3\,€} \cdot \frac{25.00\,€}{2200\mathrm{kpl}/\mathrm{kk}} &= -1.5 \\
\Leftrightarrow x &= \frac{-1.5 \cdot 3\,€\ \cdot 2200\mathrm{kpl}/\mathrm{kk}}{25.00\,€} \cdot = -396\mathrm{kpl}/\mathrm{kk}
\end{aligned}
$$

Jousto

Esimerkki 2. Jos $y = f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, niin mikä on y:n jousto x:n suhteen, kun muutokset ovat pieniä.

Jousto

Esimerkki 2. Jos $y = f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, niin mikä on y:n jousto x:n suhteen, kun muutokset ovat pieniä.

$$\text{jousto} \;=\; \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$$

Jousto

Esimerkki 2. Jos $y = f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, niin mikä on y:n jousto x:n suhteen, kun muutokset ovat pieniä.

$$\text{jousto} \quad = \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$$

Jousto

Esimerkki 2. Jos $y = f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, niin mikä on y:n jousto x:n suhteen, kun muutokset ovat pieniä.

$$\begin{aligned} \text{jousto} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} \\ &= f'(x) \cdot \frac{x}{y} \end{aligned}$$

Jousto

Esimerkki 2. Jos $y = f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, niin mikä on y:n jousto x:n suhteen, kun muutokset ovat pieniä.

$$
\begin{aligned}
\text{jousto} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} \\
&= f'(x) \cdot \frac{x}{y} \\
&= \frac{1}{2} \cdot x^{1-1/2} \cdot \frac{x}{x^{1/2}}
\end{aligned}
$$

Jousto

Esimerkki 2. Jos $y = f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, niin mikä on y:n jousto x:n suhteen, kun muutokset ovat pieniä.

$$\begin{aligned} \text{jousto} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} \\ &= f'(x) \cdot \frac{x}{y} \\ &= \frac{1}{2} \cdot x^{1-1/2} \cdot \frac{x}{x^{1/2}} \\ &= \frac{x}{2 \cdot x^{1/2} \cdot x^{1/2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Rajatuotto

Kun yritys valmistaa tuotetta jaksossa määrän q (kpl/jakso), niin kassaan kertyvä tuotto on

$$R(q) = p \cdot q = p(q) \cdot q.$$

Rajatuotto

Kun yritys valmistaa tuotetta jaksossa määrän q (kpl/jakso), niin kassaan kertyvä tuotto on

$$R(q) = p \cdot q = p(q) \cdot q.$$

Esimerkki. Jos kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.1q$, niin tuotto funktio on

$$\begin{aligned} R(q) &= p \cdot q \\ &= (20 - 0.1q) \cdot q \\ &= 20q - 0.1q^2 \end{aligned}$$

Rajatuotto

Kun yritys valmistaa tuotetta jaksossa määrän q (kpl/jakso), niin kassaan kertyvä tuotto on

$$R(q) = p \cdot q = p(q) \cdot q.$$

Esimerkki. Jos kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.1q$, niin tuotto funktio on

$$\begin{aligned} R(q) &= p \cdot q \\ &= (20 - 0.1q) \cdot q \\ &= 20q - 0.1q^2 \end{aligned}$$

Rajatuotto $MR(q)$ kertoo miten paljon tuotto kasvaa, kun q:ta kasvatetaan yhdellä ($\Delta q = 1$)

$$MR(q) = R(q+1) - R(q)$$

Rajatuotto

Kun yritys valmistaa tuotetta jaksossa määrän q (kpl/jakso), niin kassaan kertyvä tuotto on

$$R(q) = p \cdot q = p(q) \cdot q.$$

Esimerkki. Jos kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.1q$, niin tuotto funktio on

$$\begin{aligned} R(q) &= p \cdot q \\ &= (20 - 0.1q) \cdot q \\ &= 20q - 0.1q^2 \end{aligned}$$

Rajatuotto $MR(q)$ kertoo miten paljon tuotto kasvaa, kun q:ta kasvatetaan yhdellä ($\Delta q = 1$)

$$\begin{aligned} MR(q) &= R(q+1) - R(q) \\ &= \frac{R(q+1) - R(q)}{1} \end{aligned}$$

Rajatuotto

Kun yritys valmistaa tuotetta jaksossa määrän q (kpl/jakso), niin kassaan kertyvä tuotto on

$$R(q) = p \cdot q = p(q) \cdot q.$$

Esimerkki. Jos kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.1q$, niin tuotto funktio on

$$\begin{aligned} R(q) &= p \cdot q \\ &= (20 - 0.1q) \cdot q \\ &= 20q - 0.1q^2 \end{aligned}$$

Rajatuotto $MR(q)$ kertoo miten paljon tuotto kasvaa, kun q:ta kasvatetaan yhdellä ($\Delta q = 1$)

$$\begin{aligned} MR(q) &= R(q+1) - R(q) \\ &= \frac{R(q+1) - R(q)}{1} \approx \frac{d}{dq} R(q) = R'(q) \end{aligned}$$

Rajatuotto

Esimerkki 2. Jos kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.1q$, niin tuotto funktio on

$$
\begin{aligned}
R(q) &= p \cdot q \\
&= (20 - 0.1q) \cdot q \\
&= 20q - 0.1q^2
\end{aligned}
$$

Rajatuotto

Esimerkki 2. Jos kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.1q$, niin tuotto funktio on

$$\begin{aligned} R(q) &= p \cdot q \\ &= (20 - 0.1q) \cdot q \\ &= 20q - 0.1q^2 \end{aligned}$$

Ja rajatuotto $MR(q)$ on

$$\begin{aligned} MR(q) &= \frac{d}{dq}(20q - 0.1q^2) \\ &= 20 - 0.2q \end{aligned}$$

Rajatuotto

Esimerkki 2. Jos kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.1q$, niin tuotto funktio on

$$\begin{aligned} R(q) &= p \cdot q \\ &= (20 - 0.1q) \cdot q \\ &= 20q - 0.1q^2 \end{aligned}$$

Ja rajatuotto $MR(q)$ on

$$\begin{aligned} MR(q) &= \frac{d}{dq}(20q - 0.1q^2) \\ &= 20 - 0.2q \end{aligned}$$

HUOMAA:

$$\begin{aligned} p &= 20 - 0.1q \\ MR &= 20 - 0.2q \end{aligned} \qquad \longrightarrow \qquad MR < p$$

Rajatuotto

Rajatuottoa voidaan arvioida hinnan ja kysynnän hintajousto perusteella seuraavasti

$$MR = \frac{d}{dq}(q \cdot p(q))$$

Rajatuotto

Rajatuottoa voidaan arvioida hinnan ja kysynnän hintajousto perusteella seuraavasti

$$
\begin{aligned}
MR &= \frac{d}{dq}(q \cdot p(q)) \\
&= (\frac{d}{dq}q) \cdot p(q) + q \cdot (\frac{d}{dq}p(q))
\end{aligned}
$$

Rajatuotto

Rajatuottoa voidaan arvioida hinnan ja kysynnän hintajousto perusteella seuraavasti

$$
\begin{aligned}
MR &= \frac{d}{dq}(q \cdot p(q)) \\
&= (\frac{d}{dq}q) \cdot p(q) + q \cdot (\frac{d}{dq}p(q)) \\
&= p + q \cdot \frac{dp}{dq}
\end{aligned}
$$

Rajatuotto

Rajatuottoa voidaan arvioida hinnan ja kysynnän hintajousto perusteella seuraavasti

$$\begin{aligned} MR &= \frac{d}{dq}(q \cdot p(q)) \\ &= (\frac{d}{dq}q) \cdot p(q) + q \cdot (\frac{d}{dq}p(q)) \\ &= p + q \cdot \frac{dp}{dq} = p\left(1 + \frac{dp}{dq} \cdot \frac{q}{p}\right) \end{aligned}$$

Rajatuotto

Rajatuottoa voidaan arvioida hinnan ja kysynnän hintajousto perusteella seuraavasti

$$
\begin{aligned}
MR &= \frac{d}{dq}(q \cdot p(q)) \\
&= (\frac{d}{dq}q) \cdot p(q) + q \cdot (\frac{d}{dq}p(q)) \\
&= p + q \cdot \frac{dp}{dq} = p\left(1 + \frac{dp}{dq} \cdot \frac{q}{p}\right) \\
&= p\left(1 + \frac{1}{\text{kh-jousto}}\right)
\end{aligned}
$$

Rajatuotto

Rajatuottoa voidaan arvioida hinnan ja kysynnän hintajousto perusteella seuraavasti

$$\begin{aligned}
MR &= \frac{d}{dq}(q \cdot p(q)) \\
&= (\frac{d}{dq}q) \cdot p(q) + q \cdot (\frac{d}{dq}p(q)) \\
&= p + q \cdot \frac{dp}{dq} = p\left(1 + \frac{dp}{dq} \cdot \frac{q}{p}\right) \\
&= p\left(1 + \frac{1}{\text{kh-jousto}}\right)
\end{aligned}$$

Normaali tuotteella kysynnän hintajousto on negatiivinen ja

$$MR > 0 \quad \longrightarrow \quad \text{kh-jousto} < -1$$