Voitonmaksimointi, L5

Merkinnät

Seuraavassa tullaan systemaattisesti käyttämään seuraavia merkintöjä

$q =$	tuotannon määrä (quantity)	(kpl/kk)
$p =$	tuotteen hinta (price)	(€/kpl)
$R(q) =$	tuotto (revenue)	$R(q) = pq$
$MR(q) =$	rajatuotto (marginal revenue)	$MR(q) = R'(q)$
$C(q) =$	kustannukset (cost)	
$MC(q) =$	rajakustannus (marginal cost)	$MC(q) = C'(q)$
$P(q) =$	voitto (profit)	$P = R - C$
$VC =$	muuttuvat kust. (variable cost)	
$FC =$	kiinteät kust. (fixed cost)	$C = VC + FC$
$AC =$	C/q yksikkökust. (average cost)	
$AVC =$	VC/q muuttuvat yksikkökust.	
$AFC =$	FC/q kiinteät yksikkökust.	

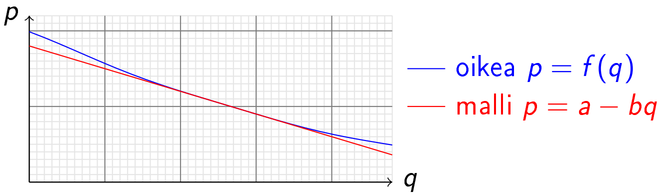
Kysyntäfunktio

Kysyntäfunktio kuvaa miten tuotteen hinta riippuu tarjolla olevien tuotteiden määrästä

$$p = p(q).$$

Kysyntäfunktiota ei yleensä tunneta tarkasti. Lisäksi kysyntä voi muuttua. Melko tavalista on, että "oikea" kysyntäfunktio korvataan sitä mahdollisimman lähellä olevalla lineaarisella kysyntäfunktiolla

$$p = a - bq$$



Tuottofunktio

Tuottofunktio kertoo myynnistä kassaan kertyvän rahavirran

$$R(q) = q \cdot p(q).$$

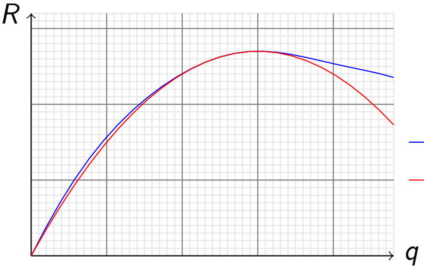
Kun sijoitamme tähän lineaarisen kysyntäfunktion, saamme mallin mukaisen tuottofunktion

$$R(q) = q \cdot (a - bq) = aq - bq^2.$$

Tuottofunktio

— oikea $p = f(q)$

— mallin $p = a - bq$



— oikea $R = q \cdot f(q)$

— mallin $R = aq - bq^2$

Tuottofunktio

- Normaalitilanteessa yrityksen tuottofunktio on kasvava.
- Tuottofunktion kasvuvauhti pienenee. Eli Rajatuotto on vähenevä
$$\frac{\partial MR(q)}{\partial q} < 0.$$
- Kun q:ta kasvatetaan, niin lopulta tuotto funktiokin tulee väheneväksi, mutta tämä ei ole enää "normaalia".

Kustannusfunktio

Kustannusfunktio voidaan periaatteessa selvittää niin tarkasti kuin halutaan. Käytännössä valitaan mallin kustannusfunktio niin, että se on

- (1) yksinkertainen,
- (2) lähellä oikeata ja
- (3) $MC'(q) > 0$.

(Mikrotalousteorian mukaan normaalin yrityksen rajakustannukset ovat kasvavat.)
Siis valitaan a ja b niin, että normaalin toiminnan alueella seuraavat funktiot ovat mahdollisimman lähellä oikeita

$$\begin{aligned} MC(q) &= c + dq \\ C(q) &= FC + cq + \frac{1}{2}dq^2 \end{aligned}$$

Kustannusfunktio

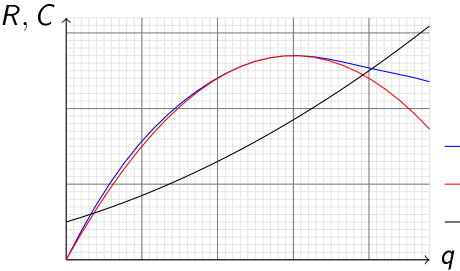
$$C(q) = FC + cq + \frac{1}{2}dq^2$$

Jos kustannuslaskenta on hoidettu hyvin, niin

- Ensimmäinen termi FC, eli kiinteät kustannukset, tiedetään tarkasti,
- toisen termin kerroin c, joka on tuotannontekijöiden kustannukset per tuote, tunnetaan myös.
- Loppu kustannuksista on $0.5dq^2$, joten viimeinenkin kerroin saadaan laskettua.

Kolmas termi on hankalin ymmärtää. Koska halusimme yksinkertaisen rajakustannuksen, valitsimme malliin rajakustannusfunktioksi ensimmäisen asteen polynomifunktion. Silloin kustannusfunktio on toisen asteen polynomifunktio.

Rajatuotto ja rajakustannus



— oikea $R = q \cdot f(q)$
— mallin $R = aq - bq^2$
— mallin $C = FC + cq + \frac{1}{2}dq^2$

— oikea $P = q \cdot f(q) - C(q)$
— mallin $P = aq - bq^2 - C(q)$

Voitonmaksimointi

Mallin mukainen voittofunktio on toisen asteen polynomifunktio, jonka kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Maksimivoitto saadaan, kun

$$\begin{aligned} P'(q) &= 0 \\ \frac{d}{dq}(R(q) - C(q)) &= 0 \\ R'(q) - C'(q)) &= 0 \\ MR(q) &= MC(q) \end{aligned}$$

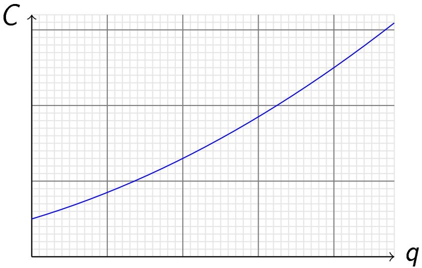
$$\boxed{MC = MR}$$

Esimerkkejä

Esim. 1

Esimerkki 1. Tarkastellaan edeltävien kuvaaja-esimerkkien mukaista tapausta.

$$p = 18.00 - 0.30q$$



$$C = 50 + 3.0q + 0.05q^2$$

Voitonmaksimoinnissa tarvitsemme rajakustannukset ja rajatuoton. Siis

$$\begin{aligned} C &= 50 + 3q + 0.05q^2 \\ MC &= 3 + 0.1q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= 18 - 0.3q \qquad \text{kysyntäfunktio} \\ R &= qp = 18q - 0.3q^2 \qquad \text{tuottofunktio} \\ MR &= 18 - 0.6q \qquad \text{rajatuotto} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MC &= MR \\ 3 + 0.1q &= 18 - 0.6q \\ 0.7q &= 15 \\ q &= \frac{15}{0.7} \approx 21.4 \end{aligned}$$

Esimerkkejä

Esim. 1

Voitto on siis suurin mahdollinen, kun $q = 21.4$ (kpl/kk).
Voitto on silloin

$$
\begin{aligned}
P(21.4) &= R(21.4) - C(21.4) \\
&= (18 \cdot 21.4 - 0.3 \cdot 21.4^2) \\
&\quad -(50 + 3 \cdot 21.4 + 0.05 \cdot 21.4^2) \\
&= (247.81) - (50 + 64.2 + 22.90) = 110.70 \text{ (€/kk)}
\end{aligned}
$$

Esimerkkejä

Esim. 2

Yritys valmistaa tuotetta kuukaudessa määrä $q = 150\text{kpl/kk}$ ja saa sen markkinoitua hintaan $p = 18€$. Kysynnän hintajousto on -3.00 ja kustannusfunktio on $C(q) = 200 + 2q + 0.1q^2$.

a) Laske voitto.
b) Maksimoi voitto, kun oletamme kysyntäfunktion lineaariseksi.

Ensimmäinen asia on estimoida kysyntäfunktio. Sen jälkeen lasku etenee samoin kuin edellisessä esimerkissä.

Esimerkkejä
Esim. 2

a) Tiedämme, että

$$
\begin{aligned}
C(q) &= 200 + 2q + 0.1q^2, \\
q &= 150 \text{ kpl/kk, ja} \\
p &= 18 \text{ €/kpl}
\end{aligned}
$$

Siis

$$
\begin{aligned}
R(150) &= 150 \cdot 18 = 2700 \text{€/kk} \\
C(150) &= 200 + 2 \cdot 150 + 0.1 \cdot 150^2 = 2750 \text{€/kk} \\
P(150) &= R(150) - C(150) = 2700 - 2750 = -50 \text{€/kk}
\end{aligned}
$$

Yritys tekee siis tappiota.

b) Kirjoitetaan kysyntäfunktio muotoon

$$p = a - bq.$$

Silloin

$$\begin{aligned}
\text{jousto} &= \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = \frac{1}{dp/dq} \cdot \frac{p}{q} = \frac{1}{-b} \cdot \frac{p}{q} \\
\Leftrightarrow -3 &= \frac{1}{-b} \cdot \frac{18}{150} \\
\Leftrightarrow b &= \frac{18}{3 \cdot 150} \\
\Leftrightarrow b &= 0.04
\end{aligned}$$

Saimme siis selville, että kysyntäfunktio on muotoa

$$p = a - 0.04q$$

Seuraavaksi selvitämme vakion a sillä, että tiedämme kysynnän q ja hinnan p arvot nyt (nyt $q = 150$kpl/kk ja $p = 18$€/kpl). Sijoitamme arvot edelliseen yhtälöön:

$$\begin{aligned} 18 &= a - 0.04 \cdot 150 \\ a &= 18 + 0.04 \cdot 150 = 24 \end{aligned}$$

Siis

$$p = 24.00 - 0.04q$$

Esimerkkejä

Esim. 1

Voitonmaksimoinnissa tarvitsemme rajakustannukset ja rajatuoton. Siis

$$\begin{aligned} C &= 200 + 2q + 0.1q^2 \\ MC &= 2 + 0.2q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= 24.00 - 0.04q && \text{kysyntäfunktio} \\ R &= 24q - 0.04q^2 && \text{tuottofunktio} \\ MR &= 24 - 0.08q && \text{rajatuotto} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MC &= MR \\ 2 + 0.2q &= 24 - 0.08q \\ 0.28q &= 22 \\ q &= \frac{22}{0.28} \approx 78.6 \end{aligned}$$

Esimerkkejä
Esim. 2

Tiedämme, että

$$\begin{aligned} R(q) &= 24q - 0.04q^2 \\ C(q) &= 200 + 2q + 0.1q^2, \\ q^\star &= 78.6 \text{ kpl/kk} \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} P(78.6) &= R(78.6) - C(78.6) \\ &= (24 \cdot 78.6 - 0.04 \cdot 78.6^2) \\ &\quad -(200 + 2 \cdot 78.6 + 0.1 \cdot 78.6^2) \\ &= 664.29 \text{ €/kk} \end{aligned}$$

Tällä tuotannon määrällä yritys tekee voittoa.