Diskonttaus

Summamerkintä

Jaksolliset suoritukset

Tasaerälaina

Osamaksukaupa

Edellä aina laskettiin kasvanut pääoma alkupääoman ja koron perusteella. Seuraavaksi pohdimme käänteistä ongelmaa:

"Miten suuri tulee alkupääoman K_0 olla, jotta n jakson kuluttua kasvanut pääoma olisi K_n, kun jakson korkotekijä on $(1+i)$?"

$$\text{vastaus:} \qquad K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$$

"Miten suuri tulee alkupääoman K_0 olla, jotta ajan t kuluttua kasvanut pääoma olisi K_t, kun todellinen vuosikorkotekijä on $(1+i_{tod})$?"

$$\text{vastaus:} \qquad K_0 = \frac{K_t}{(1+i_{tod})^t} = \mathrm{e}^{-\rho t} K_t$$

Esimerkki 1. Yrittäjä tietää joutuvansa maksamaan 1000€ maksun kahden ja puolen vuoden kuluttua ($n = 30$ kuukautta, $t = 2.5$ vuotta). Yrittäjällä on mahdollisuus tehdä pitkäaikais-sijoitus 10% todellisella vuosikorolla. Miten suuri sijoitus tulee tehdä, jotta maksu voidaan aikanaan hoitaa kasvaneella pääomalla?

$$\text{kuukausikorkotekijä} = (1+i) = 1.10^{1/12}.$$

Koronkoron kaavalla

$$K_0 = \frac{K_{30}}{(1+i)^n} = \frac{1000€}{1.10^{30/12}} = 787.99€$$

Jatkuvan korkolaskun kaavalla

$$K_0 = \frac{K_t}{(1+i_{tod})^t} = \frac{1000€}{1.10^{2.5}} = 787.99€$$

Korkointensiteetin avulla

$$\begin{aligned}
\rho &= \ln(1.10) = 0,095310179804 \\
K_0 &= \mathrm{e}^{-\rho t} K_t \\
&= \mathrm{e}^{-0,095310179804 \cdot 2.5} \cdot 1000€ = 787.99€
\end{aligned}$$

Esimerkki 2. Nuori mies saa perintönä 1000€, mutta testamentissa säädetään, että hän saa summan vasta 2,5 vuoden kuluttua.

Nuori mies sopii pankin kanssa lainasta 10% todellisella vuosikorolla. Laina mitoitetaan siten, että kahden ja puolen vuoden kuluttua perinnöllä hoidetaan laina korkoineen pois. Lainan määrä on silloin

$$\frac{1000€}{1.10^{2.5}} = 787.99€$$

Olkoon n:n jakson lopussa loppupääoma K_n, ja olkoon laskuissa käytetty todellinen vuosi-korkokanta $i_{tod} = p/100$. Jaetaan vuosi m jaksoon.
Kun laskemme alkupääoman

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{K_n}{(1+i_{tod})^{n/m}}$$

niin sanomme, että

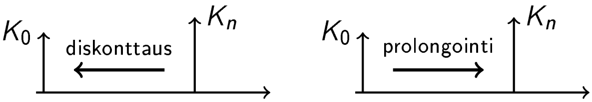
"K_0 saatiin diskonttaamalla loppupääoma n jakson yli nykyhetkeen p% laskentakorolla."

Olkoon alkupääoma K_0, ja olkoon laskuissa käytetty vuosikorkokanta $i_{tod} = p/100$. Jaetaan vuosi m jaksoon. Kun laskemme loppupääoman

$$K_n = (1+i)^n K_0 = (1+i_{tod})^{n/m} K_0$$

niin sanomme, että

"K_n saatiin prolongoimalla alkupääoma n jakson yli $p\%$ laskentakorolla."



Esimerkissä 1 meno 1000€ diskontattiin 10% laskentakorolla nykyhetkeen 30 kk-jakson (eli 2,5 vuoden) yli.

Esimerkissä 2 tulo 1000€ diskontattiin 10% laskentakorolla nykyhetkeen 30 kk-jakson (eli 2,5 vuoden) yli.

Esimerkki 1.

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{6}(2+4k) &= (2+4\cdot 3)+(2+4\cdot 4)+(2+4\cdot 5)+(2+4\cdot 6)\\ &= 14+18+22+26=80\end{aligned}$$

Summa on aritmeettinen, jos kahden peräkkäisen termin erotus on sama kaikille mahdollisille pareille

$$\begin{aligned}18-14 &= 4\\ 22-18 &= 4\\ 26-22 &= 4\end{aligned}$$

Aritmeettisen summan $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ summakaava on

$$\begin{aligned} \text{summa} &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}, \\ \text{missä} & \\ n &= \text{termien lukumäärä} \\ a_1 &= \text{ensimmäinen termi} \\ a_n &= \text{viimeinen termi} \end{aligned}$$

eli "*summa on termien lukumäärä kertaa ensimmäisen ja viimeisen keskiarvo*"

Siis

$$\sum_{k=3}^{6} (2 + 4k) = 4 \cdot \frac{14 + 26}{2} = 4 \cdot 20 = 80$$

Esimerkki 2.

$$\sum_{k=3}^{6} 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{8}{2^3} + \frac{8}{2^4} + \frac{8}{2^5} + \frac{8}{2^6} = \frac{30}{16} = 1.875$$

Summa on geometrinen, jos kahden peräkkäisen termin suhde $q = a_{j+1}/a_j$ on sama kaikille mahdollisille pareille

$$\frac{8}{2^4} : \frac{8}{2^3} = \; = \frac{8}{2^4} \cdot \frac{2^3}{8} = 0.5$$
$$\frac{8}{2^5} : \frac{8}{2^4} = \; = \frac{8}{2^5} \cdot \frac{2^4}{8} = 0.5$$
$$\frac{8}{2^6} : \frac{8}{2^5} = \; = \frac{8}{2^6} \cdot \frac{2^5}{8} = 0.5$$

Geometrisen summan $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ summakaava on

$$
\begin{aligned}
\text{summa} &= a_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)}, \\
\text{missä} & \\
n &= \text{termien lukumäärä} \\
a_1 &= \text{ensimmäinen termi} \\
q &= \text{peräkkäisten termien suhde}
\end{aligned}
$$

Siis

$$\sum_{k=3}^{6} 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{8}{2^3} \cdot \frac{(1-0.5^4)}{(1-0.5)} == 1.875$$

Tarkastellaan tilannetta, jossa asiakas tallettaa pankkitilille toistuvasti yhtäsuuren rahasumman k aina korkojakson lopussa. Asiakas suorittaa talletuksen n kertaa. Lasketaan tilillä oleva pääoma jaksojen lopussa. Olkoon korkotekijä $r = 1 + i$, silloin kertyneet pääomat ovat

$$
\begin{array}{rcl}
\text{1. jakson lopussa } K_1 & = & k \\
\text{2. jakson lopussa } K_2 & = & rK_1 + k = rk + k \\
\text{3. jakson lopussa } K_3 & = & rK_2 + k = r^2k + rk + k \\
\text{4. jakson lopussa } K_4 & = & rK_3 + k = r^3k + r^2k + rk + k \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\text{n. jakson lopussa } K_n & = & r^{n-1}k + \cdots + r^2k + rk + k \\
 & & \text{(geometrinen summa)}
\end{array}
$$

n:nnen jakson lopussa kertynyt pääoma on

$$\begin{aligned} K_n &= r^{n-1}k + \cdots + r^2k + rk + k \\ &= k \cdot \frac{(1-r^n)}{(1-r)} = k \cdot \frac{(r^n-1)}{(r-1)} = k \cdot \frac{((1+i)^n-1)}{((1+i)-1)} \\ &= k \cdot \frac{((1+i)^n-1)}{i} \end{aligned}$$

Seuraavaksi laskemme, miten suuri alkupääoma K_0 pitää tilille tallettaa ensimmäisen jakson alussa, jotta pääoma (ilman muita talletuksia) olisi n. jakson lopussa K_n eli sama kuin jaksollisten talletusten tapauksessa. Tarvittava alkupääoma saadaan diskonttaamalla loppupääoma K_n ensimmäisen jakson alkuun eli

Alkupääoma (maksuvirran nykyarvo) on

$$
\begin{aligned}
K_0 &= \frac{1}{(1+i)^n} \cdot K_n = \frac{1}{(1+i)^n} \cdot k \cdot \frac{((1+i)^n - 1)}{i} \\
&= k \cdot \frac{((1+i)^n - 1)}{i(1+i)^n}
\end{aligned}
$$

Sovitaan merkinnät

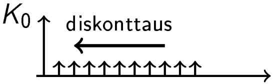
$$s_{n;i} = \frac{((1+i)^n - 1)}{i} = \text{jakson lopussa suoritettujen}$$

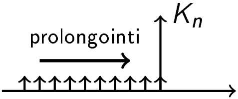
yhtäsuurten maksujen prolongointitekijä

$$a_{n;i} = \frac{((1+i)^n - 1)}{i(1+i)^n} = \text{jakson lopussa suoritettujen}$$

yhtäsuurten maksujen diskonttaustekijä

jolloin





$$K_0 = a_{n;i}k \qquad K_n = s_{n;i}k$$

Tasaerälaina eli annuiteettilaina

- Asiakas lainaa pankista summan K_0 ja kuolettaa lainan maksamalla n kertaa samansuuruisen **kuoletuserän**, eli **annuiteetin**, k.
- Annuiteetit maksetaan aina korkojakson lopussa ja se osa annuiteetista, joka ylittää koron, lyhentää lainaa.
- Sitä mukaa kun korko vähenee kasvaa lyhennyksen osuus kuoletuserästä.

Seuraava taulukko kuvaa annuiteettilainan hoitoa, kun korkokanta on i ja vastaava korkotekijä on $r = 1 + i$.

korko-jakso	lainan määrä alussa	lopussa
1	K_0	$K_1 = rK_0 - k$
2	K_1	$K_2 = rK_1 - k = r^2K_0 - rk - k$
3	K_2	$K_3 = rK_2 - k = r^3K_0 - r^2k - rk - k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n		$K_n = r^nK_0 - (r^{n-1}k + r^{n-2}k + \cdots + rk + k)$

Lopussa lainan pääoma on nolla, joten

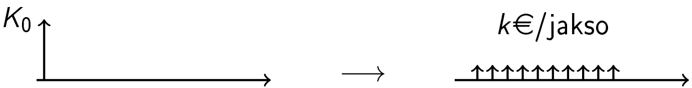
$$\begin{aligned} K_n = 0 \Leftrightarrow r^nK_0 - k \cdot \frac{(1-r^n)}{(1-r)} &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{i(1+i)^n}{((1+i)^n - 1)} \cdot K_0 \end{aligned}$$

Sovitaan merkintä

$$c_{n;i} = \frac{i(1+i)^n}{((1+i)^n - 1)} = \text{kuoletuskerroin}$$

jolloin "tasaerä on kuoletuskerroin kertaa lainan määrä"

$$k = c_{n;i} K_0$$



Kootaan vielä kaavat samaan näkymään

$$s_{n;i} = \frac{((1+i)^n - 1)}{i} = \text{prolongointitekijä}$$

$$a_{n;i} = \frac{((1+i)^n - 1)}{i(1+i)^n} = \text{diskonttaustekijä}$$

$$c_{n;i} = \frac{i(1+i)^n}{((1+i)^n - 1)} = \text{kuoletuskerroin}$$

HUOMAA:

$$c = \frac{1}{a}$$

Esimerkki 1. Laske tasaerä, kun lainan määrä on 5 000€, laina hoidetaan kuukausierinä, laina-aika on 15 kuukautta ja todellinen vuosikorko on 6.15%.

Kuukausikorkotekijä on

$$(1+i) = 1.0615^{1/12} \Rightarrow \begin{cases} i &= [1.0615^{1/12} - 1] \\ (1+i)^n &= 1.0615^{(15/12)} \end{cases}$$

Tasaerä on

$$\begin{aligned} k &= cK_0 = \frac{i(1+i)^n}{((1+i)^n - 1)} \cdot K_0 \\ &= \frac{[1.0615^{1/12} - 1] \cdot 1.0615^{15/12}}{(1.0615^{15/12} - 1)} \cdot 5\,000€ \\ &= 346.78€ \end{aligned}$$

(Tarkistus: $15 \cdot 346.78 = 5201.7$ ok)

Tarkastellaan kauppaa, jossa asiakas ostaa tavaran, jonka käteishinta on H. Kauppias ja asiakas sopii, että kaupantekohetkellä suoritetaan käsiraha h ja sen jälkeen n kertaa kuukauden välein osamaksuerä k. Todellinen vuosikorko on $p\%$.

Eräs tapa hoitaa käytännön järjestelyt on seuraava. Kauppias ottaa pankista osamaksuvelkaa $K_0 = H - h$ vastaavan annuiteettilainan, ja asiakas kuolettaa lainan osamaksuilla.

Käytännössä lainan järjestävä rahoitusyhtiö perii osamaksulisän m, joka lisää velan määrää. Osamaksulisä sisältää korvauksen vakuusprovisiosta (n. 3–5% osamaksuvelasta), luottoriskistä (n. 1–2% osamaksuvelasta), luottotieto-, lomake-, ym. kustannukset sekä liikevaihtovero.

$$\boxed{\text{Siis} \qquad k = c(H - h + m),}$$

$$\begin{aligned} \text{missä} \quad H &= \text{käteishinta} \\ h &= \text{käsiraha} \\ m &= \text{osamaksulisä} \approx 0.04 \cdot (H - h) \end{aligned}$$

Esimerkki 1. Asiakas ostaa auton, jonka käteishinta olisi 15 000€, osamaksulla siten, että käsiraha on 20%, laina-aika 36 kuukautta ja osamaksulisä 600€. Todellinen vuosikorko on 4.5% ja osamaksut ja korko suoritetaan kuukausittain.

Käsiraha on $h = 0.20 \cdot 15\,000€ = 3\,000€$.
Osamaksuvelka plus osamaksulisä on
$H - h + m = 15\,000€ - 3\,000€ + 600€ = 12\,600€$.

$$\begin{aligned} k &= c(H-h+m) = \frac{i(1+i)^n}{((1+i)^n - 1}(H-h+m) \\ &= \frac{[1.045^{(1/12)} - 1] \cdot 1.045^{(36/12)}}{1.045^{(36/12)} - 1} \cdot 12\,600€ = 374.30€ \end{aligned}$$

(Tarkistus: $36 \cdot 374.30 = 13\,474.80$ ok)