

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

10. harjoitus, viikko 15 (2.4.–6.4.2011)

R1	ma	10–12	D115	R4	to	08–10	D115
R2	ma	14–16	D102	R5	to	14–16	D102
R3	ti	08–10	D102	R6	pe	08–10	D102
				R7	pe	12–14	D102

Olkoon tutkittavina matriisit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Laske a) determinantti b) transpoosi ja c) käänteismatriisi matriisille \mathbf{M} .
2. Määritä rivioperaatioiden avulla käänteismatriisi matriisille \mathbf{N} .
3. Määritä adjungaatin avulla käänteismatriisi matriisille \mathbf{N} .
4. Ratkaise Cramerin kaavoilla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z = -7 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 9y - 20z = 0 \end{cases}$$

5. Etsi jokin ei-triviaali ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} 3x - 3y + 4z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 3x + 9y - 20z = 0 \end{cases}$$

6. Kaupungissa on 10 000 taloutta, jossa pyykki pestää käyttäen jotakin kolmesta pesuaineesta "A", "B" tai "C". Pesuaine A on laadukasta ja vastaa hyvin kuluttajien tarpeita. Niistä kuluttajista, jotka edellisellä kerralla ostivat A-paketin 90% ostaa seuraavallakin kerralla A-paketin ja 10% vaihtaa pesuainetta (5% ostaa B-paketin ja 5% ostaa C-paketin). B-pesuaine ei ole yhtä laadukasta kuin A-pesuaine. B-pesuainetta ostaneista 80% pysyy samassa ja 20% vaihtaa merkkiä (10% ostaa A:ta ja 10% ostaa C:tä). C-pesuaine on heikkolaatuisinta. Sen käyttäjistä vain 50% ostaa samaa pesuainetta seuraavallakin kerralla ja 50% vaihtaa ainetta (25% ostaa A:ta ja 25% ostaa B:tä).

Indeksoidaan tuotteet luonnollisella tavalla: $A \sim 1$, $B \sim 2$ ja $C \sim 3$. Olkoon x_{jk} tuotteen j markkinaosuus "kierroksella" k . Silloin

$$x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} = 10000, \forall k$$

Markkinaosuuksista saadaan osuusvektori

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}$$

Osuusvektorin odotusarvo kierroksella $k + 1$ saadaan siirtymä-todennäköisyyksien perusteella lausekkeesta

$$\vec{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{1;k+1} \\ x_{2;k+1} \\ x_{3;k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix}}_{=P} \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} = P\vec{x}_k$$

Pesuaine A on juuri tullut myyntiin ja lähtötilanteen osuusjakauma on $\vec{x}_0 = (0 \ 7000 \ 3000)^T$. Laske pesuaineen A markkinaosuus kierroksilla $1, \dots, 5$. (Jos et laske käsin vaan käytät laskemiseen exceliä, niin laske odotusarvot pidemmälle aikajaksolle, $k = 1, \dots, 100$.)

7. Mikä on tehtävässä 6 kuvattujen markkinoiden tasapainojakauma \vec{x}^*

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}, \text{ kun } k \rightarrow \infty$$

8. Olkoon A-pesuaineen valmistajan saama kate $0,40\text{€}/\text{paketti}$. Oletamme nyt, että yksi kierros \sim yksi kuukausi. Kuukausijakssoon liittyvä laskentakorkokanta on $i = 0,01$.

a) Mikä on ensimmäisen vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto (ei diskontata)

$$\sum_{k=1}^{12} 0,40 \cdot x_{1k}.$$

b) Mikä on vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto sen jälkeen, kun tasapaino on saavutettu (ei diskontata)

$$12 \cdot 0,40 \cdot x_1^*.$$

c) Mikä on A-pesuaineesta saatavan katetuottovirran nykyarvo

$$NA = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0,40 \cdot x_{1k}}{1,01^k}$$

d) Mainostoimisto tarjoaa uuden pesuaineen markkinointiin kampanjaa, jolla markkinaosuus saadaan kerralla tasapainon mukaiseksi, jolloin katetuottovirran nykyarvo olisi

$$NA_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0,40 \cdot x_1^*}{1,01^k}.$$

Mitä kampanjasta enintään kannattaa maksaa? Mitä muuta hyötyä kampanjasta voidaan saada katetuottovirran kasvamisen lisäksi?