

6. Kaupungissa on 10 000 taloutta, jossa pyykki pestää käyttäen jotakin kolmesta pesuaineesta "A", "B" tai "C". Pesuaine A on laadukasta ja vastaa hyvin kuluttajien tarpeita. Niistä kuluttajista, jotka edellisellä kerralla ostivat A-paketin 90% ostaa seuraavallakin kerralla A-paketin ja 10% vaihtaa pesuainetta (5% ostaa B-paketin ja 5% ostaa C-paketin). B-pesuaine ei ole yhtä laadukasta kuin A-pesuaine. B-pesuainetta ostaneista 80% pysyy samassa ja 20% vaihtaa merkkiä (10% ostaa A:tä ja 10% ostaa C:tä). C-pesuaine on heikkolaatuisinta. Sen käyttäjistä vain 50% ostaa samaa pesuainetta seuraavallakin kerralla ja 50% vaihtaa ainetta (25% ostaa A:tä ja 25% ostaa B:tä).

Indeksoidaan tuotteet luonnollisella tavalla:  $A \sim 1$ ,  $B \sim 2$  ja  $C \sim 3$ . Olkoon  $x_{jk}$  tuotteen  $j$  markkinaosuus "kierroksella"  $k$ . Silloin

$$x_{1k} + x_{2k} + x_{3k} = 10000, \forall k$$

Markkinaosuuksista saadaan osuusvektori

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}$$

Osuusvektorin odotusarvo kierroksella  $k+1$  saadaan siirtymä-todennäköisyyksien perusteella lausekkeesta

$$\vec{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{1;k+1} \\ x_{2;k+1} \\ x_{3;k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix}}_{=P} \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} = P\vec{x}_k$$

Pesuaine A on juuri tullut myyntiin ja lähtötilanteen osuusjakauma on  $\vec{x}_0 = (0 \quad 7000 \quad 3000)^T$ . Laske pesuaineen A markkinaosuus kierroksilla  $1, \dots, 5$ . (Jos et laske käsin vaan käytät laskemiseen exceliä, niin laske odotusarvot pidemmälle aikajaksolle,  $k = 1, \dots, 100$ .)

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7000 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1450 \\ 6350 \\ 2200 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1450 \\ 6350 \\ 2200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2490 \\ 5702,5 \\ 1807,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2490 \\ 5702,5 \\ 1807,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3263,1 \\ 5138,4 \\ 1598,5 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_4 = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3263,1 \\ 5138,4 \\ 1598,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3850,3 \\ 4672,5 \\ 1476,2 \end{pmatrix}$$

7/11

$$\bar{x}_5 = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3850,3 \\ 4672,5 \\ 1476,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4301,7 \\ 4300,4 \\ 1397,9 \end{pmatrix}$$

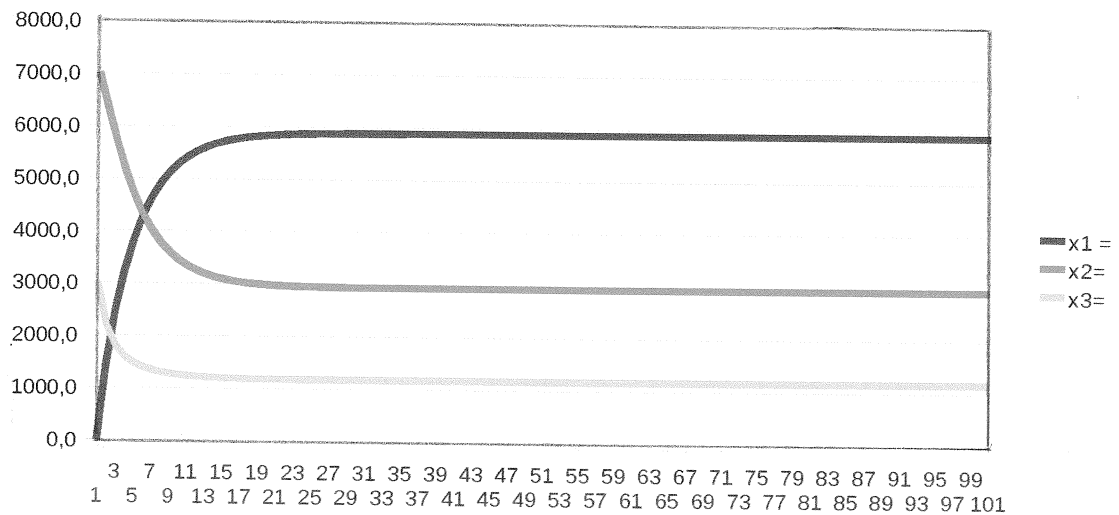
P =

0,90	0,10	0,25
0,05	0,80	0,25
0,05	0,10	0,50

k =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

x1 =	0,0	1450,0	2490,0	3263,1	3850,3	4301,7	4651,0	4922,4	5133,7	5298,4
x2 =	7000,0	6350,0	5702,5	5138,4	4673,5	4300,4	4004,9	3772,5	3590,4	3448,0
x3 =	3000,0	2200,0	1807,5	1598,5	1476,2	1398,0	1344,1	1305,1	1275,9	1253,7



7. Mikä on tehtävässä 6 kuvattujen markkinoiden tasapainojakauma  $\vec{x}^*$

8/11

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}, \text{ kun } k \rightarrow \infty$$

$$P \vec{x}^* = \vec{x}^* \quad \text{ja} \quad x_1^* + x_2^* + x_3^* = 10000$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,25 \\ 0,05 & 0,80 & 0,25 \\ 0,05 & 0,10 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,90x_1^* + 0,10x_2^* + 0,25x_3^* = x_1^* \\ 0,05x_1^* + 0,80x_2^* + 0,25x_3^* = x_2^* \\ 0,05x_1^* + 0,10x_2^* + 0,50x_3^* = x_3^* \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0,10x_1^* + 0,10x_2^* + 0,25x_3^* = 0 \\ 0,05x_1^* - 0,20x_2^* + 0,25x_3^* = 0 \\ 0,05x_1^* + 0,10x_2^* - 0,50x_3^* = 0 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -0,10 & 0,10 & 0,25 & 0 \\ 0,05 & -0,20 & 0,25 & 0 \\ 0,05 & 0,10 & -0,50 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 0,5 \quad \cdot 0,5 \\ \leftarrow + \\ \downarrow + \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -0,10 & 0,10 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,15 & 0,375 & 0 \\ 0 & 0,15 & -0,375 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 40 \\ \cdot 40 \\ \leftarrow x_1^* + x_2^* + x_3^* = 10000 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & 10 & 0 \\ 0 & -6 & 15 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 10000 \end{array} \right)$$

Ratkaistaan Cramerilla

$$D = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 10 \\ 0 & -6 & 15 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +(-4) \begin{vmatrix} -6 & 15 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 15 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 10 \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ = -4(-6-15) - 4(0-15) + 10 \cdot (0-6) \\ = 84 + 60 + 60 = \underline{\underline{204}}$$

$$D_1 = \begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 0 & -6 & 15 \\ 10000 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = +0 - 0 + 10000 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ -6 & 15 \end{vmatrix} \\ = 1200000$$

$$D_2 = \begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{vmatrix} -4 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 15 \\ 1 & 10000 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = -0 + 0 - 10000 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 10 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} \\ = 600000$$

$$D_3 = \begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{vmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 10000 \end{vmatrix} \end{array} = +0 - 0 + 10000 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} \\ = 240000$$

$$x_1^* = \frac{D_1}{D} = \frac{1200000}{204} \approx 5882,4$$

$$x_2^* = \frac{D_2}{D} = \frac{600000}{204} \approx 2941,2$$

$$x_3^* = \frac{D_3}{D} = \frac{240000}{204} \approx 1176,5$$

9/11

8. Olkoon A-pesuaineen valmistajan saama kate 0.40€/paketti. Oletamme nyt, että yksi kierros ~ yksi kuukausi. Kuukausijaksoon liittyvä laskentakorkokanta on  $i = 0,01$ .  
 a) Mikä on ensimmäisen vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto (ei diskontata)

$$\sum_{k=1}^{12} 0,40 \cdot x_{1k}$$

b) Mikä on vuoden aikana A-pesuaineesta kertynyt katetuotto sen jälkeen, kun tasapaino on saavutettu (ei diskontata)

$$12 \cdot 0,40 \cdot x_1^*$$

c) Mikä on A-pesuaineesta saatavan katetuottovirran nykyarvo

$$NA = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0,40 \cdot x_{1k}}{1,01^k}$$

d) Mainostoimisto tarjoaa uuden pesuaineen markkinointiin kampanjaa, jolla markkinaosuus saadaan kerralla tasapainon mukaiseksi, jolloin katetuottovirran nykyarvo olisi

$$NA_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0,40 \cdot x_1^*}{1,01^k}$$

Mitä kampanjasta enintään kannattaa maksaa? Mitä muuta hyötyä kampanjasta voidaan saada katetuottovirran kasvamisen lisäksi?

Kaavaja

$$A + PA + P^2A + \dots + P^{n-1}A = \sum_{k=0}^{n-1} P^k A = (I - P)^{-1} (A - P^n A)$$

$$a) \sum_{k=1}^{12} 0,40 x_{1k} = \underline{\underline{20\,767,67 \text{ €}}}$$

Excel

$$b) 12 \cdot 0,40 \cdot x_1^* = 12 \cdot 0,40 \cdot 5\,882,4 = \underline{\underline{28\,235,52 \text{ €}}}$$

$$c) NA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (0,40 \ 0 \ 0) \frac{P^k \bar{x}_0}{1,01^k}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (0,4 \ 0 \ 0) \left( \sum_{k=1}^n \left( \frac{P}{1,01} \right)^k \right) \bar{x}_0$$

$$= (0,4 \ 0 \ 0) \left( I - \frac{P}{1,01} \right)^{-1} \frac{P}{1,01} \bar{x}_0 = \underline{\underline{22\,777,1 \text{ €}}}$$

Excel

$$d) NA_2 = \frac{0,40 \cdot 5\,882,4}{0,01} = \underline{\underline{23\,529,6 \text{ €}}}$$

$$NA_2 - NA = 7\,525 \text{ €}$$

10/11

11/11

Taulukko1

P =	0,90	0,10	0,25										
	0,05	0,80	0,25										
	0,05	0,10	0,50										
k =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9			
x1 =	0,0	1450,0	2490,0	3263,1	3850,3	4301,7	4651,0	4922,4	5133,7	5298,4			
x2 =	7000,0	6350,0	5702,5	5138,4	4673,5	4300,4	4004,9	3772,5	3590,4	3448,0			
x3 =	3000,0	2200,0	1807,5	1598,5	1476,2	1398,0	1344,1	1305,1	1275,9	1253,7			

