Vaasan yliopisto, kevät 2011

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

1/43

3. harjoitus, viikko 5 (31.1.–4.2.11)

R1	ma	10–12	D115	R4	to	08–10	D115
R2	ma	14–16	D102	R5	to	14–16	D102
R3	ti	08–10	D102	R6	pe	08–10	D102
				R7	pe	12–14	D102

1. Yrityksen erään tuotelinjan kysyntäfunktio on $p = 20 - 0.030\,q$ ja vastaava kustannusfunktio on $C(q) = 0.02q^2 + 5q + 150$. Millä tuotannon määrällä voitto on suurin mahdollinen. Mikä on maksimivoitto?

$p = 20 - 0{,}030q$

$R = 20q - 0{,}03q^2$

$MR = 20 - 0{,}06q$

$C = 0{,}02q^2 + 5q + 150$

$MC = 0{,}04q + 5$

$MC = MR$

$0{,}04q + 5 = 20 - 0{,}06q$

$0{,}1q = 15$

$\underline{q = 150}$

$P(150) = R(150) - C(150)$

$= (20 \cdot 150 - 0{,}03 \cdot 150^2) - (0{,}02 \cdot 150^2 + 5 \cdot 150 + 150)$

$= 2325 - (450 + 750 + 150)$

$= 975$

2. Tehdas valmistaa viikossa tuotetta määrän q ja myy sen hintaan p (euroa/tuote). On arvioitu, että hintaan 4 euroa/tuote saadaan myytyä 100 tuotetta viikossa ja hintaan 3 euroa/tuote saadaan myytyä 200 tuotetta viikossa. Käytetään seuraavassa laskelmassa lineaarista kysyntäfunktiota $p(q) = 5 - 0.01q$. Tuotteen valmistaminen aiheuttaa kustannuksia 1,5 euroa/tuote ja valmistusmäärästä riippumaton kiinteä kustannus on 230 euroa/viikko. Millä valmistusmäärällä yritys saa suurimman voiton? (voitto=myyntitulo – kustannukset)

$p = 5 - 0{,}01q$

$R = 5q - 0{,}01q^2$

$MR = 5 - 0{,}02q$

$C(q) = 1{,}5q + 230$

$MC = 1{,}5$

$MC = MR$

$1{,}5 = 5 - 0{,}02q$

$0{,}02q = 3{,}5 \qquad 1 \cdot 50$

$q = 175$

Vastaus tuotantomäärällä 175 kpl/viikko voitto on suurin

3. Tarkastellaan uudelleen tehtävän 2 ongelmaa. Nyt kuitenkin yrityksen tuotantokapasiteetti on 150 tuotetta/viikko. Yritys voi ylittää kapasiteettinsa, jos se teettää kapasiteetin ylittävän osan tuotteista ylityönä. Ylityönä tehdyn tuotteen valmistuskustannus on 1,6 euroa/tuote. Jos ylityötä tehdään on kiinteä kustannus 250 euroa/viikko. Millä valmistusmäärällä yritys nyt saa suurimman voiton (voitto = myyntitulo − kustannukset)?

Kysyntä ei ole muuttunut tehtävästä 2 $\Rightarrow$ $R(q) = 5q - 0{,}01q^2$

$$C(q) = \begin{cases} 1{,}5q + 230, & \text{kun } q \le 150 \\ 1{,}5 \cdot 150 + 1{,}6(q-150) + 250, & \text{kun } q > 150 \end{cases}$$

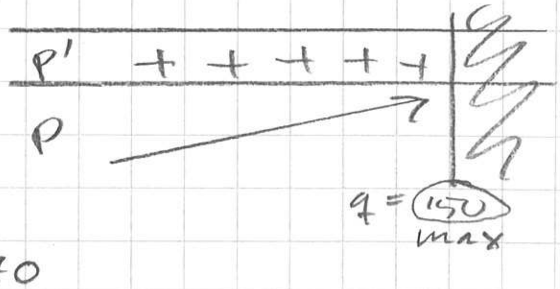
$$= \begin{cases} 1{,}5q + 230, & \text{kun } q \le 150 \\ 1{,}6q + 235, & \text{kun } q > 150 \end{cases}$$

Voittofunktio (epäjatkuva!)

$$P(q) = R(q) - C(q) = \begin{cases} -0{,}01q^2 + 3{,}5q - 230, & q \le 150 \\ -0{,}01q^2 + 3{,}4q - 235, & q > 150 \end{cases}$$

Vaihtoehto I (ei tehdä ylityötä, $q \le 150$)

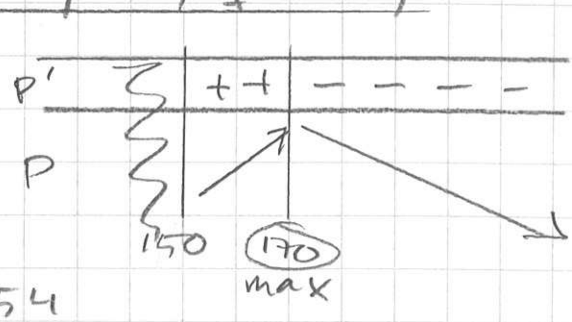
$P(q) = -0{,}01q^2 + 3{,}5q - 230$
$P'(q) = -0{,}02q + 3{,}5$
$P'(q) = 0 \Leftrightarrow q = 175$



$P(150) = -0{,}01 \cdot 150^2 + 3{,}5 \cdot 150 - 230 = 70$

Vaihtoehto II (tehdään ylityötä, $q > 150$)

$P(q) = -0{,}01q^2 + 3{,}4q - 235$
$P'(q) = -0{,}02q + 3{,}4$
$P'(q) = 0 \Leftrightarrow q = 170$



$P(170) = -0{,}01 \cdot 170^2 + 3{,}4 \cdot 170 - 235 = 54$

Vastaus: Suurin voitto saadaan, kun tuotantomäärä on 150 kpl/viikko (ei siis tehdä ylityötä)

4. a) Olkoon kysyntäfunktio $p = 20 - 0.2q$

(1) Mikä on kysynnän hintajousto, kun $q = 20$?

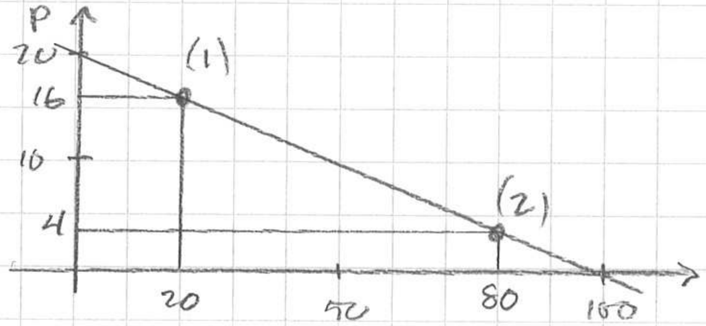
(2) Mikä on kysynnän hintajousto, kun $q = 80$?

b) Mikä on kysynnän hintajousto, jos kysyntä riippuu hinnasta siten, että

$$q = a \cdot p^{\eta}.$$

c) Piirrä kysyntäfunktion graafi muodossa $p = f(q)$ (eli p on arvo kohdassa q), kun $q = 16 \cdot p^{-2}$.

a)



$p(q) = 20 - 0{,}2q \rightarrow \frac{dp}{dq} = -0{,}2 \rightarrow \frac{dq}{dp} = -5$

tilanne (1) $q = 20$, $p = 16$

$\text{jousto} = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = -5 \cdot \frac{16}{20} = -4$

tilanne (2) $q = 80$, $p = 4$

$\text{jousto} = \frac{dp}{dq} \cdot \frac{p}{q} = -5 \cdot \frac{4}{80} = -0{,}25$

$\therefore$ Kysynnän hintajousto ei ole vakio vaan riippuu kulloisestakin toimintapisteestä

b) $q(p) = a \cdot p^{\eta} \rightarrow \frac{dq}{dp} = \eta a \cdot p^{\eta - 1}$

$\text{jousto} = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = \eta \cdot a \cdot p^{\eta-1} \frac{p}{a p^{\eta}}$

$= \frac{\eta \cancel{a} \cancel{p^{\eta}}}{\cancel{a} \cancel{p^{\eta}}} = \eta$

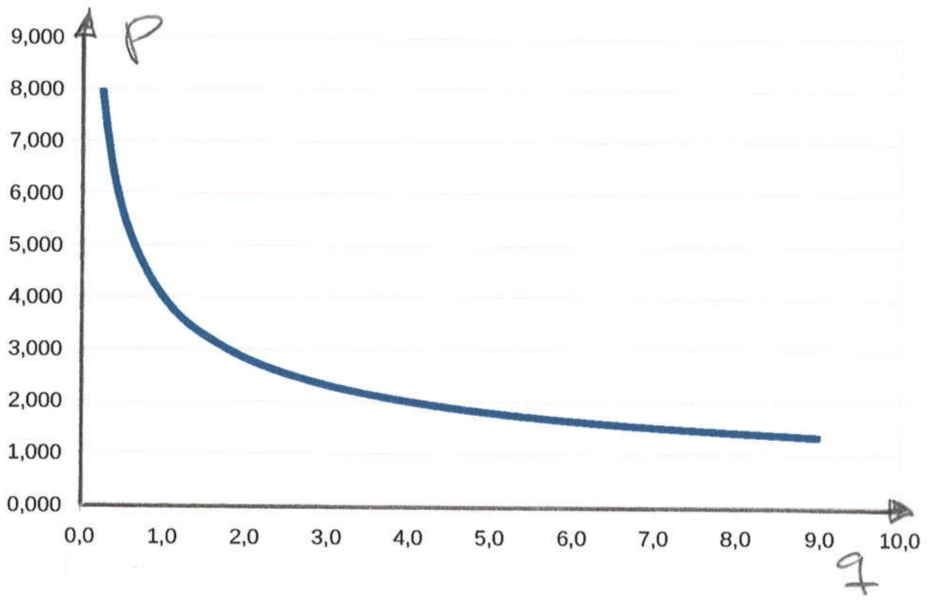
Kysynnän hintajousto on nyt aina sama!

c) $\boxed{q = 16 \cdot p^{-2}}$

$$\Leftrightarrow \quad p^2 = \frac{16}{q}$$

$$\Leftrightarrow \quad p = \frac{4}{\sqrt{q}} = 4 \cdot q^{-1/2}$$

q	p
0,3	8,000
0,5	5,657
1,0	4,000
1,5	3,266
2,0	2,828
2,5	2,530
3,0	2,309
3,5	2,138
4,0	2,000
4,5	1,886
5,0	1,789
5,5	1,706
6,0	1,633
6,5	1,569
7,0	1,512
7,5	1,461
8,0	1,414
8,5	1,372
9,0	1,333



5. Erään kappaletavaratuotteen varaston yksikköylläpitokustannukset ovat 4€ kappaletta ja vuotta kohti. Tilauskustannukset ovat 80€ tilauserältä. Kysyntä on tasaista ja suuruudeltaan 4000 kpl vuodessa. Täydennystoimitukset tapahtuvat ongelmitta, ja varastointitila on rajoittamaton. Puutetta ei sallita. Miten suuri on optimaalinen tilauserän koko ja miten suuret ovat varastonpidon kokonaiskustannukset?

$$\left.\begin{array}{l} D = 4000\ \text{kpl/vuosi} \\ K = 80\ € \\ h = 4\ \frac{€}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}} \end{array}\right\} \quad q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \cdot 4000}{4}} = 400\ \text{kpl}$$

$$TC_0 = \frac{KD}{q_0} + h \cdot \frac{q_0}{2} = \frac{80\ € \cdot 4000\ \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}}{400\ \text{kpl}} + 4\ \frac{€}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{400\ \text{kpl}}{2}$$

$$= 800\ \frac{€}{\text{vuosi}} + 800\ \frac{€}{\text{vuosi}} = 1600\ \frac{€}{\text{vuosi}}$$

Vastaus: $q_0 = 400\ \text{kpl}$ ja $TC_0 = 1600\ \frac{€}{\text{vuosi}}$

6. Suurpesula tarvitsee 2 500 astiaa tiettyä pesuainetta kuukaudessa. Yksikköylläpitokustannus on 0.5€/astia/vuosi. Tilauskustannukset ovat 75€ tilaukselta. Pesula tilaa ainetta nykyisin 5 000 astian erissä. Miten suureen vuosisäästöön pesulan on mahdollista päästä muuttamalla tilauspolitiikkaansa? Miten tilaukset tällöin tehdään?

$$D = 2500 \frac{ast}{kk} = 30000 \ ast/vuosi$$
$$h = 0{,}5 \ €/ast/vuosi$$
$$K = 75 \ €$$

Nyt
$$TC = \frac{KD}{q} + h \cdot \frac{q}{2}$$
$$= \frac{75 € \cdot 30000 \frac{ast}{vuosi}}{5000 \ ast} + 0{,}5 \frac{€}{ast \cdot vuosi} \cdot \frac{5000 \ ast}{2}$$
$$= 450 \frac{€}{vuosi} + 1250 \frac{€}{vuosi} = 1700 \ €/vuosi$$

Optimi:
$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 75 \cdot 30000}{0{,}5}} \ ast = 3000 \ ast$$

$$TC_0 = \frac{KD}{q_0} + h \cdot \frac{q_0}{2}$$
$$= \frac{75 € \cdot 30000 \ ast/vuosi}{3000 \ ast} + 0{,}5 \frac{€}{ast \cdot vuosi} \cdot \frac{3000 \ ast}{2}$$
$$= 750 \ €/vuosi + 750 \ €/vuosi = 1500 \ €/vuosi$$

Vastaus: On mahdollista säästää 200 €/vuosi (~ 12 %) muuttamalla tilauserä 3000 astiaan.

7. Vuodessa raaka-ainevaraston läpi kulkee kappaletavaraa $D = 1600$ kpl. Tilauskustannus on 9€/erä ja varaston ylläpitokustannus on 1.5€/(kuukausi·kpl).

a) Mikä on optimaalinen tilauserän koko, ja miten suuret ovat varastosysteemin vuotuiset kokonaiskustannukset ?

b) Raaka-aineen yksikköhinta on 5€/kpl. Raaka-aineen toimittaja tarjoaa määräalennusta, joka on 1% ostohinnasta, kun tilauserä on vähintään 50 kappaletta, ja 3% ostohinnasta, kun tilauserä on vähintään 100 kappaletta. Mikä on nyt optimaalinen tilauserä?

$D = 1600 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}$

$K = 9$ €

$h = 1{,}5$ €/kpl/kk $= 18$ €/kpl/vuosi

a) $$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 1600}{18}}\ \text{kpl} = \underline{\underline{40\ \text{kpl}}}$$

$$TC_0 = \frac{KD}{q_0} + h \cdot \frac{q_0}{2} = \left(\frac{9 \cdot 1600}{40} + 18 \cdot \frac{40}{2}\right)\frac{€}{\text{vuosi}}$$

$$= 360 \frac{€}{\text{vuosi}} + 360 \frac{€}{\text{vuosi}} = \underline{\underline{720\ €/\text{vuosi}}}$$

b) Vaihtoehdot ovat $q_0 = 40$ kpl, $q_1 = 50$ kpl ja $q_2 = 100$ kpl

$q = 40$ kpl

$$\tilde{TC} = \frac{KD}{q_0} + h\frac{q_0}{2} + 5 €/\text{kpl} \cdot D = \left(\frac{9 \cdot 1600}{40} + 18 \cdot \frac{40}{2} + 5 \cdot 1600\right)\frac{€}{v}$$

$$= 360\frac{€}{v} + 360\frac{€}{v} + 8000\frac{€}{v} = 8720\frac{€}{v}$$

$q = 50$ kpl

$$\tilde{TC} = \frac{KD}{q_1} + h\frac{q_1}{2} + 4{,}95 \cdot D = \left(\frac{9 \cdot 1600}{50} + 18 \cdot \frac{50}{2} + 4{,}95 \cdot 1600\right)\frac{€}{v}$$

$$= 288\frac{€}{v} + 450\frac{€}{v} + 7920\frac{€}{v} = \underline{\underline{8658\frac{€}{v}}}$$

$q = 100$ kpl

$$\tilde{TC} = \frac{KD}{q_2} + h \cdot \frac{q_2}{2} + 4{,}85 \cdot D = \left(\frac{9 \cdot 1600}{100} + 18 \cdot \frac{100}{2} + 4{,}85 \cdot 1600\right)\frac{€}{v}$$

$$= 144\frac{€}{v} + 900\frac{€}{v} + 7760\frac{€}{v} = 8804\frac{€}{v}$$

Vastaus a) $q_0 = 40$ kpl, $TC_0 = 720$ €/v

b) optimi tilauserä on 50 kpl