Vaasan yliopisto, kevät 2011

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

7. harjoitus, viikko 11 (14.3.–18.3.2011)

R1	ma	10–12	D115	R4	to	08–10	D115
R2	ma	14–16	D102	R5	to	14–16	D102
R3	ti	08–10	D102	R6	pe	08–10	D102
				R7	pe	12–14	D102

Ota seuraavissa laskuissa mallia luennoilla käsitellyistä esimerkeistä, jotka löydät osoitteesta `http://lipas.uwasa.fi/~mla/orms1030/orms1030k09h8r.pdf`

1. Seuraavassa laskussa laskentakorkona on todellinen vuosikorko 10%. (Siis $1+i_{vuosi} = 1{,}10$, ja $1+i_{kk} = 1{,}10^{1/12}$). Tarkastellaan jatkuvaa vakiotulovirtaa ($k = 2\,400€/\text{vuosi} = 200€/\text{kk}$), joka alkaa hetkellä $t = 0$ ja päättyy hetkellä $t = T = 1{,}5\text{vuotta} = 18\text{kk}$. Korkointensiteetti voidaan päätellä joko vuosijakson tai kuukausijakson korkotekijästä

$$\rho_v = \ln(1+i_{vuosi})\frac{1}{\text{vuosi}}, \qquad \rho_{kk} = \ln(1+i_{kk})\frac{1}{\text{kk}}.$$

Integroimalla saadaan jatkuvan vakiotulivirran nykyarvolle kaava

$$NNA = \int_0^T e^{-\rho t} k\,dt = \frac{k}{\rho}(1-e^{-\rho T}).$$

a) Sijoita edelliseen kaavaan vakioiden k,T ja ρ vuosi-arvot. Onko lausekkeen arvo järkevä, kun sitä vertaa puolentoista vuoden kertymään

$$1{,}5\,\text{vuotta} \cdot 2400\frac{€}{\text{vuosi}} = 3600€?$$

a) Sijoita edelliseen kaavaan vakioiden k,T ja ρ kuukausi-arvot. Onko lausekkeen arvo järkevä, kun sitä vertaa 18 kuukauden kertymään

$$18\,\text{kk} \cdot 200\frac{€}{\text{kk}} = 3600€?$$

2. Laske integraalifunktiot

$$\text{a)} \int (2x^3 - 6x^2 + 5x)\,dx, \qquad \text{b)} \int x(x^2 - 2x + 1)\,dx$$

3. Laske määrätyt integraalit

$$\text{a)} \int_0^{10} (20 + 0{,}4t)\,dt, \qquad \text{b)} \int_0^{10} (24 - 4e^{-t})\,dt$$

4. Tarkista derivoimalla alla olevan kaavakokoelman kaavat (1), (2) ja (3).
Tarvitset tulon derivointikaavaa $D(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ ja eksponenttifunktion derivaatan kaavaa $D(be^{rx}) = r\cdot be^{rx}$.

5. Eksponenttijakauman tiheysfunktio on $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, missä oletamme, että $x > 0$ ja $\lambda > 0$. Laske integraali

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \lambda e^{-\lambda x}dx.$$

(Ohje: raja-arvoa laskiessa tulee vastaan muoto $\lim_{x\to\infty} P(x)e^{-\lambda x}$. Tämä raja-arvo on 0, sillä tekijä $e^{-\lambda x}$ pienenee kohden nollaa nopeammin kuin mikään polynomi.)

6. Eksponenttijakauman tiheysfunktio on $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Laske eksponenttijakauman odotusarvo eli integraali

$$\int_0^\infty xf(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \lambda x e^{-\lambda x}dx.$$

Kaavoja:

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad \int ae^{rx}\,dx = \frac{a}{r}e^{rx} + C,\\
&(2) \qquad \int axe^{rx}\,dx = \frac{a}{r^2}(rx-1)e^{rx} + C\\
&(3) \qquad \int ax^2e^{rx}\,dx = \frac{a}{r^3}(r^2x^2 - 2rx + 2)e^{rx} + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{yksinkertainen korkolasku: } K_t &= (1+it)K_0 = (1+\frac{p}{100}t)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1\\
\text{koronkorkolasku: } K_t &= (1+i)^tK_0, \text{ kun } t = 1,2,3,\ldots\\
\text{jatkuva korkolasku: } K_t &= (1+i)^tK_0 = e^{\rho t}K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1+i) = e^{\rho}
\end{aligned}$$