

## Talousmatematiikan perusteet, orms.1030

Opettaja: Matti Laaksonen

### 1. välikoe torstai 3.3.2011

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja.

---

**A1/B2/C4/D2.** a) (2p) Mikä on kuukausijakson korkokanta, kun todellinen vuosikorko on 6,25%?

b) (2p) Mikä on todellinen vuosikorko, jos kuukausijakson korkokanta on 0,003394246?

c) (2p) Laske tasaerälainan annuiteetti, kun laina-aika on 36 kuukautta, lainan määrä on 1 500 euroa, laina hoidetaan kuukausittain ja lainaan liittyvä todellinen vuosikorko on 6,25%.

*Ratkaisut:*

a)

$$\begin{aligned}(1 + i_{kk})^{12} &= 1,0625 \\ (1 + i_{kk}) &= 1,0625^{1/12} \\ i_{kk} &= 1,0625^{1/12} - 1 = 0,00506483495\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(1 + i_{vuosi}) &= (1 + i_{kk})^{12} = 1,003394246^{12} = 1,041500001 \\ \Leftrightarrow i_{vuosi} &= 0,0415 \quad \Leftrightarrow \text{todellinen vuosikorko on } 4,15\%\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}k &= cK_0 = \frac{i(1+i)^n}{((1+i)^n - 1)} K_0 \\ &= \frac{[1,0625^{1/12} - 1] \cdot 1,0625^{36/12}}{(1,0625^{36/12} - 1)} \cdot 1500\text{€} = 45,6858031362751\text{€} \approx 45,69\text{€}\end{aligned}$$

(Tarkistus:  $36 \cdot 45,69\text{€} = 1644,84\text{€}$  OK!)

*Vastaus:* a) Kuukausijakson korkokanta on 0,00506483495,

b) todellinen vuosikorko on 4,15% ja

c) annuiteetti on 45,69€.

---

**A2/B1/C4/D2.** Yritys valmistaa  $q$  tuotetta viikossa. Kysyntäfunktio on  $p = 150 - 0,0025q$  ja vastaava rajakustannusfunktio on  $MC(q) = 0,02q + 40$  ja kiinteät kustannukset ovat  $FC = 20000$ .

a) (2p) Millä tuotantomäärällä voitto on suurin?

b) (2p) Mikä on maksimivoitto?

c) (2p) a-kohdan yritys tuottaa nyt 3000 tuotetta viikossa. Miten paljon voitto kasvaa, jos tuotantoa kasvatetaan 10%? Miten kateprosentti muuttuu, jos tuotantoa kasvatetaan 10%? (Kateprosentti = (voitto/myynti)\*100%)

Ratkaisut:

$$\begin{aligned}p &= 150 - 0,0025q \\R(q) &= pq = (150 - 0,0025q)q \\&= 150q - 0,0025q^2 \\MR(q) &= 150 - 0,005q\end{aligned}$$

a) Voitonmaksimointi

$$\begin{aligned}MC &= MR \\ \Leftrightarrow 0,02q + 40 &= 150 - 0,005q \\ \Leftrightarrow 0,025q &= 110 \quad | \cdot 40 \\ \Leftrightarrow q &= 4400\end{aligned}$$

b) Maksimivoitto

$$\begin{aligned}MC(q) &= 0,02q + 40 \\ \rightarrow C(q) &= 0,01q^2 + 40q + 20000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(4400) &= R(4400) - C(4400) \\ &= (150 \cdot 4400 - 0,0025 \cdot 4400^2) - (0,01 \cdot 4400^2 + 40 \cdot 4400 + 20000) \\ &= 611600 - 389600 = 222000\end{aligned}$$

c) Muutokset

$$\begin{aligned}R(3000) &= (150 \cdot 3000 - 0,0025 \cdot 3000^2) = 427500 \\ P(3000) &= 427500 - (0,01 \cdot 3000^2 + 40 \cdot 3000 + 20000) = 197500 \\ \text{kate\%} &= \frac{197500\text{€}}{427500\text{€}} \cdot 100\% = 46,20\% \\ \\ R(3300) &= (150 \cdot 3300 - 0,0025 \cdot 3300^2) = 467775 \\ P(3300) &= 467775 - (0,01 \cdot 3300^2 + 40 \cdot 3300 + 20000) = 206875 \\ \text{kate\%} &= \frac{206875\text{€}}{467775\text{€}} \cdot 100\% = 44,23\%\end{aligned}$$

Kun tuotanto nostetaan 3000 tuotteesta viikossa 3300 tuotteeseen viikossa, niin voitto kasvaa 197500 eurosta viikossa 206875 euroon viikossa. Voitto kasvaa siis määrällä  $\Delta P = 9375\text{€}/\text{vko}$  (4,75%). Kateprosentti pieneni 1,97 %-yksikköä. (46,20%  $\rightarrow$  44,23%)

Vastaus: a) Voitto on suurin, kun tuotantomäärä on 4400 kpl/vko.

b) Maksimivoitto on 222000 €/vko.

c) Voitto kasvaa 9375 €/vko (4,75%) ja kateprosentti pienenee 1,97 prosenttiyksikköä.

- 
- A3/B4/C1/D4.** a) (2p) Määrittele lyhyesti sanallisesti  $y$ :n jousto  $x$ :n suhteen.  
b) (2p) Tuotteen hinta on nyt 12.50€ ja kysyntä 2 800 tuotetta kuukaudessa. Jos tuotteen hintaa nostetaan 5.0%, niin kysynnän arvellaan vähenevän 12.0%. Mikä on tuotteen kysynnän hintajousto?  
c) (2p) Voiko edellä annettujen tietojen perusteella muodostaa voitonmaksimoinnissa tarvittavan lineaarisen kysyntäfunktion? (Perustele.)

*Ratkaisut:* a)  $y$ :n jousto  $x$ :n suhteen on  $y$ :n prosenttimuutos jaettuna  $x$ :n prosenttimuutoksella

$$\text{jousto} = \frac{\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\%}{\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$$

b)

$$\text{jousto} = \frac{-12,0\%}{5,0\%} = -2,4$$

c) Kysyntäfunktion muotoa  $p = a - bq$ . Silloin

$$\begin{aligned} p = a - bq &\Rightarrow q = \frac{a}{b} - \frac{1}{b} \cdot p \\ &\Rightarrow \frac{dq}{dp} = -\frac{1}{b} \\ &\Rightarrow \text{jousto} = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = \frac{-1}{b} \cdot \frac{p}{q} \\ &\Rightarrow -2,4 = \frac{-1}{b} \cdot \frac{12,50}{2800} \\ &\Rightarrow b = 0,0018601 \end{aligned}$$

Sijoittamalla  $p$ :n arvo,  $q$ :n arvo ja edellä saatu  $b$ :n arvo kysyntäfunktion, saadaan yhtälö, josta  $a$ :n arvo saadaan ratkaistua

$$\begin{aligned} 12,50 &= a - 0,0018601 \cdot 2800 \\ \Rightarrow a &= 12,50 + 0,0018601 \cdot 2800 = 17,708 \end{aligned}$$

Siis kysyntäfunktion on

$$p = 17,7 - 0,00186 \cdot q$$

---

**A4/B3/C3/D1.** Määritetään raaka-aineen tilauserä. Raaka-aineen kysyntä on 4800 kg/vuosi. Tilauskustannus on 6.00 euroa/tilaus ja varaston yksikköylläpitokustannus on 0.25 €/kg/kuukausi.

- a) (2p) Mikä on optimaalinen tilauserän koko?  
b) (2p) Mitkä ovat varastonhoidon kokonaiskustannukset vuodessa?  
c) (2p) Raaka-aineen toimittaja antaa sisäänostossa 2% määräalennuksen, jos tilauserä on vähintään 200kg. Raaka-aineen normaali ostohinta on 0.50€/kg. Mikä on nyt optimaalinen tilauserä?

*Ratkaisut:*

$$\begin{aligned}D &= 4800 \text{ kg/vuosi} \\K &= 6,00 \text{ €} \\h &= 0,25 \text{ €/kg/kuukausi} = 3,00 \text{ €/kg/vuosi}\end{aligned}$$

a)

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,00 \cdot 4800}{3,00}} = 138,6 \text{ kg}$$

b)

$$\begin{aligned}TC_0 &= \frac{KD}{q_0} + h \cdot \frac{q_0}{2} = \frac{6,00 \text{ €} \cdot 4800 \frac{\text{kg}}{\text{vuosi}}}{138,6 \text{ kg}} + 3,00 \frac{\text{€}}{\text{kg} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{138,6 \text{ kg}}{2} \\&= 207,79 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 207,90 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 415,69 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}\end{aligned}$$

c) Lasketaan varastonhoidon ja sisäänostojen yhteenlasketut kustannukset, kun  $q = q_0 = 138,6 \text{ kg}$  ja  $q_1 = 200 \text{ kg}$ .

$$\begin{aligned}\tilde{TC}(q_0) &= \frac{KD}{q_0} + h \cdot \frac{q_0}{2} + p_0 D = \left( \frac{6 \cdot 4800}{138,6} + 3 \cdot \frac{138,6}{2} + 0,50 \cdot 4800 \right) \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \\&= (207,79 + 207,90 + 2400) \text{ €/vuosi} = 2815,69 \text{ €/vuosi} \\ \tilde{TC}(q_1) &= \frac{KD}{q_1} + h \cdot \frac{q_1}{2} + p_1 D = \left( \frac{6 \cdot 4800}{200} + 3 \cdot \frac{200}{2} + 0,49 \cdot 4800 \right) \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} \\&= (144 + 300 + 2352) \text{ €/vuosi} = 2796 \text{ €/vuosi}\end{aligned}$$

$\tilde{TC}(q_1) < \tilde{TC}(q_0)$ , joten optimaalinen tilauserä on  $q_1 = 200 \text{ kg}$ .

*Vastaus:* a)  $q_0 = 138,6 \text{ kg}$ , b)  $TC_0 = 415,69 \text{ €/vuosi}$ , c) optimaalinen tilauserän koko on  $200 \text{ kg}$ .

---

## Kaavoja:

$$\frac{d}{dx}ax^n = n \cdot ax^{n-1}$$

## Interpolointi:

$$f(x) \approx f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1))$$

## Varastomallit:

$$\begin{aligned} \text{perusmalli} \quad q_0 &= \sqrt{\frac{2KD}{h}} \\ \text{puutemalli} \quad q_1 &= q_0 \sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0 \sqrt{\frac{s}{h+s}}, \\ TC_1(q) &= \frac{KD}{q} + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q} \end{aligned}$$

## Korkolasku:

yksinkertainen korkolasku:

$$K_t = (1 + it)K_0 = \left(1 + \frac{p}{100}t\right)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

koronkorkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0, \text{ kun } t = 1, 2, 3, \dots$$

jatkuva korkolasku:

$$K_t = (1 + i)^t K_0 = e^{pt} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1 + i) = e^p$$

## Jaksolliset suoritukset

$$\text{prolongointitekijä } s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\text{diskonttaustekijä } a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$\text{kuoletuskerroin } c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

## Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\text{annuiteetti: } k = c_{n,i}K_0 \quad \text{osamaksuerä: } k = c_{n,i}(H - h + m)$$

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

## Rajatuotto ja kysynnän hinta jousto

$$MR = p \cdot \left(1 + \frac{1}{\text{kysynnän hintajousto}}\right)$$