

## Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

### 9. harjoitus, viikko 12 (19.-23.3.2012)

R1	ma	10-12	D115	R4	to	08-10	D115
R2	ma	14-16	D102	R5	to	14-16	D102
R3	ti	08-10	D102	R6	pe	08-10	D102
				R7	pe	12-14	D102

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 4x + 5y - 3z = 3 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

2. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 5y = 8 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

3. Etsi ainakin yksi ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 3x + 5y - 2z = 4 \end{cases}$$

Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määritettyjä!) a)  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ , b)  $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ , c)  $\mathbf{B} + \mathbf{C}$

5. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määritettyjä!) a)  $\mathbf{AB}$ , b)  $\mathbf{BA}$ , c)  $\mathbf{AC}$ , d)  $\mathbf{CA}$ , e)  $\mathbf{C}^T \mathbf{A}$

6. Tuotteiden A, B ja C sisäänostohinnat ovat

tuote	A	B	C
hinta	2.50	0.50	1.00

Sijoitetaan vastaavat luvut matriisiin (hintavektori)

$$\mathbf{p} = ( 2.5 \quad 0.5 \quad 1.0 ).$$

Yritykse kolme osastoa: myyntiosasto (M-os), valmistusosasto (V-os), suunnitteluosasto (S-os) ja Helsingin toimisto (H-to) ostavat tammikuussa tuotteita A, B ja C seuraavan taulukon mukaiset määrät

tuote	A	B	C
M-os	20	30	0
V-os	10	50	20
S-os	0	10	40
H-to	30	10	10

Sijoitetaan nämäkin luvut matriisiin (ostomatriisi)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

- Laske matriisilauseke  $\mathbf{pD}^T$ . (Mitä edellä saadun vektorin koordinaatit merkitsevät?)
- Onko lauseke  $\mathbf{pD}$  järkevä (mikä sen arvo on)?
- Onko lauseke  $\mathbf{Dp}^T$  järkevä (mikä sen arvo on)?
- Onko lauseke  $\mathbf{Dp}$  järkevä (mikä sen arvo on)?

7. Tarkastellaan matriisia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

- Määritä rivioperaatioiden avulla matriisin  $\mathbf{A}$  käänteismatriisi.
- Ratkaise käänteismatriisin avulla  $x$  ja  $y$  yhtälöparista

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vihje: a-kohdan vastaus on:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

# Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

## 9. harjoitus, viikko 12 (19.-23.3.2012)

R1	ma	10-12	D115	R4	to	08-10	D115
R2	ma	14-16	D102	R5	to	14-16	D102
R3	ti	08-10	D102	R6	pe	08-10	D102
				R7	pe	12-14	D102

### 1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 4x + 5y - 3z = 3 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 4 \cdot 2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \text{false!}$$

Ratkaisujoukko on tyhjä

### 2. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 5y = 8 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 4 \cdot 2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -4 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 & (1) \\ -3y = -4 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) &\rightarrow y = \frac{4}{3} \\ (1) &\rightarrow x + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{9}{3} \\ &\Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vastaus  $x = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3}$

Tarkistus

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3} &= \frac{6}{3} = 2 \quad \checkmark \\ 4 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{4}{3} &= \frac{24}{3} = 8 \quad \checkmark \\ \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} &= \frac{9}{3} = 3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

3. Etsi ainakin yksi ratkaisu yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 3x + 5y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ -y - 5z = 7 \end{cases} \begin{array}{l} z \Rightarrow \\ \cdot (-1) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 - z & (1) \\ y = -7 - 5z & (2) \end{cases}$$

Olkoon  $z = 1$ , silloin

$$(2) \rightarrow y = -7 - 5 \cdot 1 = -12$$

$$(1) \rightarrow x + 2 \cdot (-12) = -1 - 1 \\ x = 22$$

$$V: \begin{cases} x = 22 \\ y = -12 \\ z = 1 \end{cases}$$

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määritettyjä!) a)  $A+B$ , b)  $A+C$ , c)  $B+C$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + C \quad \text{ei voi laskea}$$

$$3 \times 3 \quad 3 \times 2$$

$$B + C \quad \text{ei voi laskea}$$

$$3 \times 3 \quad 3 \times 2$$

5. Laske, jos lauseke on järkevä. (Huom kaikki lausekkeet eivät nyt ole hyvin määritettyjä!) a)  $AB$ , b)  $BA$ , c)  $AC$ , d)  $CA$ , e)  $C^T A$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3 \times 3 \quad 3 \times 3$$

ok

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 6 & 9 & -2 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3 \times 3 \quad 3 \times 3$$

ok

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3 \times 3 \quad 3 \times 2$$

ok

$$CA \quad \text{ei voi laskea}$$

$$3 \times 2 \quad 3 \times 3$$

ei onnistu

$$C^T A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -13 & 3 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2 \times 3 \quad 3 \times 3$$

ok

6. Tuotteiden A, B ja C sisäänostohinnat ovat

tuote	A	B	C
hinta	2.50	0.50	1.00

Sijoitetaan vastaavat luvut matriisiin (hintavektori)

$$p = ( 2.5 \quad 0.5 \quad 1.0 ).$$

Yritykse kolme osastoa: myyntiosasto (M-os), valmistusosasto (V-os), suunnitteluosasto (S-os) ja Helsingin toimisto (H-to) ostavat tammikuussa tuotteita A, B ja C seuraavan taulukon mukaiset määrät

tuote	A	B	C
M-os	20	30	0
V-os	10	50	20
S-os	0	10	40
H-to	30	10	10

Sijoitetaan nämäkin luvut matriisiin (ostomatriisi)

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

- Laske matriisilauseke  $pD^T$ . (Mitä edellä saadun vektorin koordinaatit merkitsevät?)
- Onko lauseke  $pD$  järkevä (mikä sen arvo on)?
- Onko lauseke  $Dp^T$  järkevä (mikä sen arvo on)?
- Onko lauseke  $Dp$  järkevä (mikä sen arvo on)?

a)

$$p D^T = \begin{pmatrix} 2,5 & 0,5 & 1,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 10 & 0 & 30 \\ 30 & 50 & 10 & 10 \\ 0 & 20 & 40 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 65 & 70 & 45 & 90 \end{pmatrix} \quad \text{kokonaisten kustannukset osastoittain}$$

b)  $pD$  ei voi laskua  
 $1 \times 3 \quad 4 \times 3$

c)

$$D p^T = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 50 & 20 \\ 0 & 10 & 40 \\ 30 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0,5 \\ 1,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 70 \\ 45 \\ 90 \end{pmatrix}$$

d)  $Dp$  ei voi laskua  
 $4 \times 3 \quad 1 \times 3$

7. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

a) Määritä rivioperaatioiden avulla matriisin  $A$  käänteismatriisi.

b) Ratkaise käänteismatriisin avulla  $x$  ja  $y$  yhtälöparista

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vihje: a-kohdan vastaus on:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$a) \begin{pmatrix} \textcircled{2} & 1 & | & 1 & 0 \\ 5 & 3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & | & 0,5 & 0 \\ 0 & \textcircled{0,5} & | & -2,5 & 1 \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot 2$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 3 & -1 \\ 0 & 1 & | & -5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Vastaus: a)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

---

b)  $\begin{cases} x = 8 \\ y = -13 \end{cases}$

---

( tarkistus  $\begin{cases} 2 \cdot 8 + (-13) = 3 \quad \checkmark \\ 5 \cdot 8 + 3 \cdot (-13) = 1 \quad \checkmark \end{cases}$  )