Vaasan yliopisto, kevät 2012

Talousmatematiikan perusteet, orms.1030

Opettaja: Matti Laaksonen

C

2. välikoe maanantai 16.4.2012

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja.

1C. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

2C. Laske integraalit

a) $\displaystyle\int (2x^2 - 6x + 2)\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 (6x^2 + x)\,dx$

3C. Ratkaise LP-malli

$$\begin{array}{lrcrcl} \max z = & 3x_1 & + & 4x_2 & & \\ \text{ehdoin} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 14 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 & & & \geq & 1 \\ & & & x_2 & \geq & 2 \end{array}$$

4C. Olkoon

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ja } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Laske $\det(\boldsymbol{M})$, $\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}^T$ ja $\boldsymbol{M}^{-1}$.

5C. a) (2p) Millä ehdolla homogeenisella yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu?
b) (2p) Cramerin kaavat? (Milloin niitä voi käyttää? Milloin niitä kannattaa käyttää?)
c) (2p) Luettele ainakin neljä determinantin ominaisuutta, joiden avulla determinantin laskemista voi helpottaa.

Derivaatta ja 2. asteen yhtälö

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jaksolliset suoritukset

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \qquad a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}, \qquad c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\text{annuiteetti } k = c_{n,i} K_0$$

$$\text{osamaksuerä } k = c_{n,i}(H - h + m)$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Matriisikaavoja $(n \times n)$ neliöatriisille $\mathbf{A} = (a_{ij})$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{kj})$$

missä $\det(\mathbf{A}_{rs})$ on alkioon a_{rs} liittyvä minori

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = (\alpha_{ij})$$

missä $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ji})$ on alkioon a_{ji} liittyvä kofaktori

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \operatorname{adj}(\mathbf{A})$$

Cramerin kaavat:

$$x_j = D_j / D$$

Indeksejä

Laspeyres $\quad P^L_{t_0;t} = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t_0;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t_0;i}} \cdot 100, \qquad Q^L_{t_0;t} = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t_0;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t_0;i}} \cdot 100$

Paaschen $\quad P^P_{t_0;t} = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t;i}} \cdot 100, \qquad Q^P_{t_0;t} = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t;i}} \cdot 100$

Determinantit

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Vaasan yliopisto, kevät 2012

Talousmatematiikan perusteet, orms.1030

Opettaja: Matti Laaksonen

2. välikoe maanantai 16.4.2012 $\boxed{\text{C}}$

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin ja taulukkokirja.

1C. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \cdot 2 \; - \;\to\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \cdot 1 \; +$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x - 2y + z = 1 & (1) \\ \quad\; y - z = 2 & (2) \\ \quad\;\; -z = 0 & (3) \end{cases}$$

$(3) \to z = 0$

$(2) \to y - 0 = 2 \to y = 2$

$(1) \to x - 2 \cdot 2 + 0 = 1 \to x = 5$

Vastaus: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

(Tarkistus: $5 - 2 \cdot 2 + 0 = 1$ ✓

$2 \cdot 5 - 5 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 0$ ✓

$2 - 0 = 2$ ✓)

2C. Laske integraalit

$$\text{a)} \quad \int (2x^2 - 6x + 2)\,dx \qquad \text{b)} \quad \int_1^2 (6x^2 + x)\,dx$$

a) $\int (2x^2 - 6x + 2)\,dx$

$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + 2x + C$

$= \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 2x + C$

b) $\int_1^2 (6x^2 + x)\,dx$

$= \Big/_1^2 \left(2x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)$

$= \left(2 \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 2^2\right) - \left(2 \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2\right)$

$= (16 + 2) - \left(2 + \frac{1}{2}\right)$

$= \underline{15\frac{1}{2}}$

Vastaus: a) $\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 2x + C$

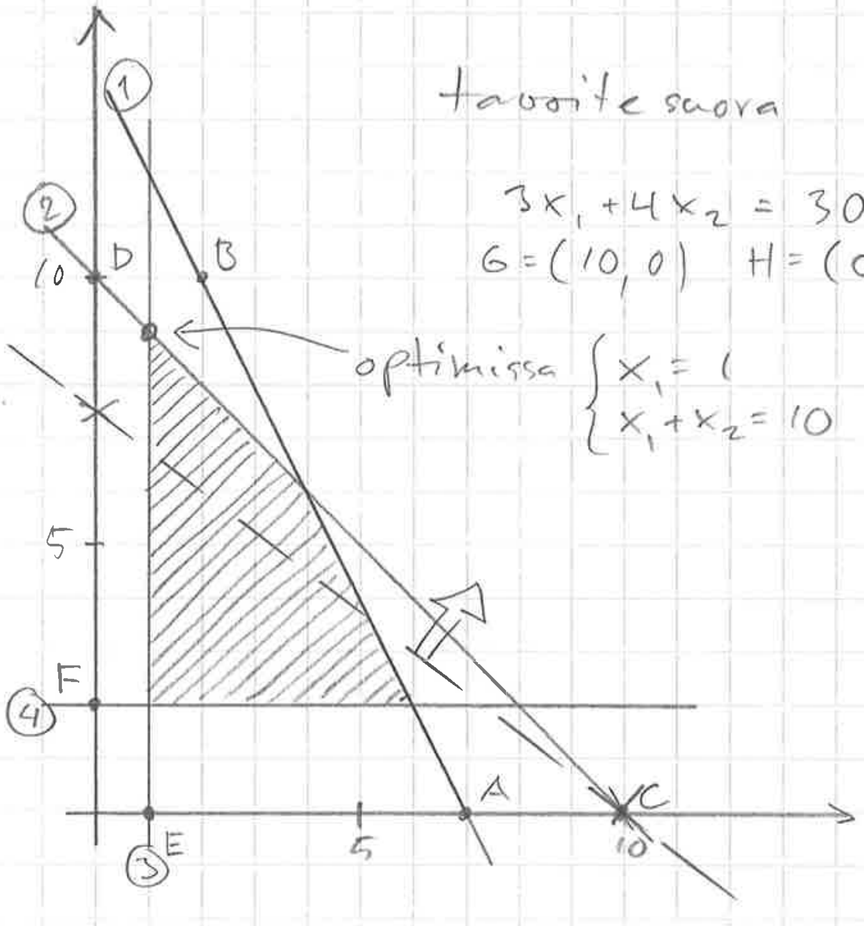
b) $15\frac{1}{2}$

3C. Ratkaise LP-malli

$$
\begin{array}{llcll}
\max z = & 3x_1 & + & 4x_2 & \\
\text{ehdoin} & 2x_1 & + & x_2 & \leq 14 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq 10 \\
 & x_1 & & & \geq 1 \\
 & & & x_2 & \geq 2
\end{array}
$$

1. rajoite $2x_1 + x_2 \leq 14$ ↓ $A = (7,0)$, $B = (2,10)$
2. rajoite $x_1 + x_2 \leq 10$ ↓ $C = (10,0)$, $D = (0,10)$
3. rajoite $x_1 \geq 1$ → $E = (1,0)$

$x_2 \geq 2$ ↑ $F = (0,2)$



tavoite suora

$3x_1 + 4x_2 = 30$

$G = (10,0)$ $H = (0, 7.5)$

optimissa $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + x_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 9 \\ z = 39 \end{cases}$

Vastaus: optimissa $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $z = 39$

4C. Olkoon

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Laske $\det(M)$, MA^T ja M^{-1}.

a) $$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot (3-0) - 0 + 4 \cdot (1-0) = \underline{10}$$

b) $$MA^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -4 \\ -3 & 10 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

c) $|M_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$, $|M_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $|M_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$,

$|M_{21}| = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$, $|M_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $|M_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$,

$|M_{31}| = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -12$, $|M_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$, $|M_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6$,

$$M^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} +(3) & -(-4) & +(-12) \\ -(1) & +(2) & -(-4) \\ +(1) & -(2) & +(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & -1{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Vastaus: a) $\det(M) = 10$

b) $$MA^T = \begin{pmatrix} 20 & -4 \\ -3 & 10 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

c) $$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & -1{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$