



Vaasan kesäyliopisto, kesä 2013

## Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

opettaja: Matti Laaksonen

### 2. välikoe, (la 31.8.2013)

Ratkaise 3 tehtävää. Kun käsittelet tehtävän, niin käsittele sen kaikki alakohdat. Koosteessa saa olla mukana laskin (myös graafinen) ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava).

#### 1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 8y - 3z = 10 \\ 4y + 4z = 20 \end{cases}$$

#### 2. Ratkaise graafisesti LP-malli

$$\begin{aligned} &\text{maksimoi } 4x_1 + 3x_2 \\ &\text{ehdoin } 3x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ &\quad 3x_1 + 4x_2 \leq 42 \\ &\quad x_1 \leq 10 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

3. Vuodessa raaka-ainevaraston läpi kulkee kappaletavaraa  $D = 160000$  kpl. Yritys aikoo ulkoistaa raaka-ainetilausten ja raaka-ainevarastojen hoidon. Yritys on saanut tarjoukset kolmelta huolintayritykseltä (H1, H2 ja H3). Yhteenveto tarjousten tiedoista on seuraavassa taulukossa.

	tilauserä $q$ (kpl)	Tilaukust. $K$ (€/erä)	Yksikköyllä- pitokust. $h$ (€/kpl/kk)	Tilaukust. (€/vuosi)	Ylläpi- tokust. (€/kk)
H1	sop. mukaan	20.00	0.080	–	–
H2	5 000	50.00	0.050	1 600.00	125.00
H3	10 000	40.00	0.075	640.00	375.00

(Maininta "sopimuksen mukaan" H1:n tarjouksessa merkitsee sitä, että kuljetukset voidaan hoitaa tilaajan vaatimalla tavalla.)

- (3p) Määritä optimaalinen tilauserän koko  $q_0$  huolintaliikkeen H1 tiedoin ja laske vastaavat tilaus- ja ylläpitokustannukset kahteen viimeiseen sarakkeeseen.
- (2p) Tarkista ja tarvittaessa korjaa H2:n ja H3:n osalta tilaus- ja ylläpitokustannukset kahdessa viimeisessä sarakkeessa.
- (1p) Mikä tarjous on tilaajalle edullisin?

4. a) Laske käänteismatriisi  $B^{-1}$  ja b) matriisitulo  $C^T B$  ja c) determinantti  $\det(B)$  kun

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ ja } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

KAAVOJA:

**Varastomallit:**

perusmalli  $q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$

puutemalli  $q_1 = q_0 \sqrt{\frac{h+s}{s}}, \quad M_1 = q_0 \sqrt{\frac{s}{h+s}}, \quad TC_1(q) = \frac{KD}{q} + \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q}$

**Derivaatta ja 2. asteen yhtälö**

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$
$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Korkolasku:**

$$K_t = (1 + it)K_0 = \left(1 + \frac{P}{100}t\right)K_0, \text{ kun } 0 < t < 1$$

$$K_t = (1 + i)^t K_0, \text{ kun } t = 1, 2, 3, \dots$$

$$K_t = (1 + i)^t K_0 = e^{\rho t} K_0, \text{ kun } t > 1 \text{ ja } (1 + i) = e^{\rho}$$

**Matriisikaavoja** ( $n \times n$ ) neliöatriisille  $\mathbf{A} = (a_{ij})$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{kj})$$

missä  $\det(\mathbf{A}_{rs})$  on alkioon  $a_{rs}$  liittyvä minori

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = (\alpha_{ij})$$

missä  $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ji})$  on alkioon  $a_{ji}$  liittyvä kofaktori

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{adj}(\mathbf{A})$$

Cramerin kaavat:

$$x_j = D_j / D$$

**Indeksejä**

$$\text{Laspeyres} \quad P_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t_0;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t_0;i}} \cdot 100, \quad Q_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t_0;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t_0;i}} \cdot 100$$

$$\text{Paaschen} \quad P_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t;i}} \cdot 100, \quad Q_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t;i}} \cdot 100$$



Vaasan kesäyliopisto, kesä 2013

## Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

opettaja: Matti Laaksonen

2. välikoe, (1a 31.8.2013)

Ratkaise 3 tehtävää. Kun käsittelet tehtävän, niin käsittele sen kaikki alakohdat. Ko-  
keessa saa olla mukana laskin (myös graafinen) ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava).

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 8y - 3z = 10 \\ 4y + 4z = 20 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & -3 & 10 \\ 0 & 4 & 4 & 20 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \leftarrow - \\ \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & -6 & 10 \\ 0 & 4 & 4 & 20 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot \frac{1}{4} \\ \end{array} \updownarrow$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -3 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 7 \\ \leftarrow - \\ \end{array} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -10 & -30 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 & (1) \\ y + z = 5 & (2) \\ -10z = -30 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \rightarrow z = 3$$

$$(2) \rightarrow y + 3 = 5 \rightarrow y = 2$$

$$(1) \rightarrow x - 2 \cdot 2 + 3 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\text{Vastaus: } x = 1, y = 2, z = 3$$

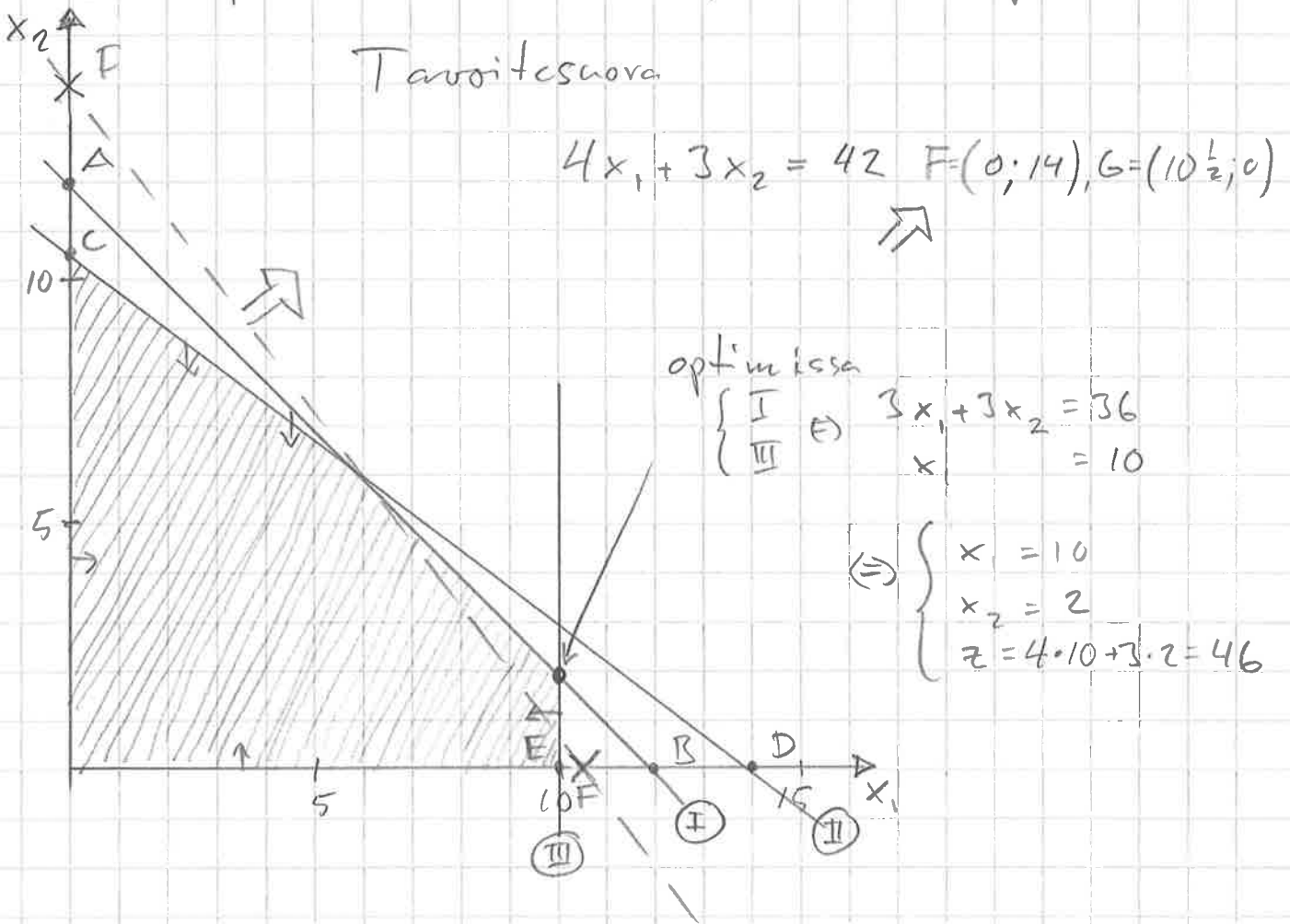
$$\left( \begin{array}{l} \text{Tarkistus} \\ 1 - 2 \cdot 2 + 3 = 0 \\ 3 \cdot 1 + 8 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 10 \\ 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 20 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{✓} \\ \text{✓} \\ \text{✓} \end{array}$$

## 2. Ratkaise graafisesti LP-malli

$$\begin{aligned} \text{maksimoi } & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{ehdoin } & 3x_1 + 3x_2 \leq 36 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 42 \\ & x_1 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Rajoitteet

$$\begin{aligned} \textcircled{I} \quad & 3x_1 + 3x_2 \leq 36 & A = (0; 12), B = (12; 0), & \downarrow \text{alapuoli ok} \\ \textcircled{II} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 42 & C = (0; 10\frac{1}{2}), D = (14; 0) & \downarrow \text{alapuoli ok} \\ \textcircled{III} \quad & x_1 \leq 10 & E = (10; 0) & \leftarrow \text{vasenpuoli ok} \end{aligned}$$



Vastaus optimissa  $x_1 = 10, x_2 = 2, z = 46$

3. Vuodessa raaka-aineväaran läpi kulkee kappaletavaraa  $D = 160000$  kpl. Yritys aikoo ulkoistaa raaka-ainetilausten ja raaka-aineväarastojen hoidon. Yritys on saanut tarjoukset kolmelta huolintayritykseltä (H1, H2 ja H3). Yhteenvedo tarjousten tiedoista on seuraavassa taulukossa.

	tilauserä $q$ (kpl)	Tilaukust. $K$ (€/erä)	Yksikköyllä- pitokust. $h$ (€/kpl/kk)	Tilaukust. (€/vuosi)	Ylläpi- tokust. (€/kk)
H1	sop. mukaan	20.00	0.080	-	-
H2	5 000	50.00	0.050	1 600.00	125.00
H3	10 000	40.00	0.075	640.00	375.00

(Maininta "sopimuksen mukaan" H1:n tarjouksessa merkitsee sitä, että kuljetukset voidaan hoitaa tilaajan vaatimalla tavalla.)

a) (3p) Määritä optimaalinen tilauserän koko  $q_0$  huolintaliikkeen H1 tiedoin ja laske vastaavat tilaus- ja ylläpitokustannukset kahteen viimeiseen sarakkeeseen.

b) (2p) Tarkista ja tarvittaessa korjaa H2:n ja H3:n osalta tilaus- ja ylläpitokustannukset kahdessa viimeisessä sarakkeessa.

c) (1p) Mikä tarjous on tilaajalle edullisin?

$$a) \quad D = 160\,000 \frac{\text{kpl}}{\text{vuosi}}$$

$$K = 20 \text{ €}$$

$$h = 0,080 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{kk}} = 0,96 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}}$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 160\,000}{0,96}} \text{ kpl} = 2582 \text{ kpl}$$

H1

$$\text{Tilaukust}_{H1} = \frac{KD}{q_0} = \frac{20 \text{ €} \cdot 160\,000 \frac{\text{kpl}}{\text{v}}}{2582 \text{ kpl}} = 1239,40 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}}$$

$$\text{Ylläpitokust}_{H1} = h \cdot \frac{q_0}{2} = 0,96 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{vuosi}} \cdot \frac{2582 \text{ kpl}}{2}$$

$$= 1239,36 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 103,28 \frac{\text{€}}{\text{kk}}$$

$$TC_{H1} = 1239,40 \text{ €/v} + 1239,36 \text{ €/v} = 2478,76 \text{ €/vuosi}$$

H2

$$\text{Tilaukust}_{H2} = \frac{KD}{q} = \frac{50 \text{ €} \cdot 160\,000 \frac{\text{kpl}}{\text{v}}}{5000 \text{ kpl}} = 1600 \text{ €/vuosi} \quad \checkmark$$

$$\text{Ylläpitokust}_{H2} = h \cdot \frac{q}{2} = 0,050 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{kk}} \cdot \frac{5000 \text{ kpl}}{2} = 125 \text{ €/kk} \quad \checkmark$$

$$TC_{H2} = 1600 \text{ €/vuosi} + 12 \cdot 125 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 3100 \text{ €/vuosi}$$

H3

$$\text{Tilaukust}_{H3} = \frac{KD}{q} = \frac{40 \text{ €} \cdot 160\,000 \frac{\text{kpl}}{\text{v}}}{10\,000 \text{ kpl}} = 640 \text{ €/vuosi} \quad \checkmark$$

$$\text{Ylläp. tokust}_{H3} = h \cdot \frac{q}{2} = 0,075 \frac{\text{€}}{\text{kpl} \cdot \text{kk}} \cdot \frac{10\,000 \text{ kpl}}{2} = 375 \text{ €/kk} \quad \checkmark$$

$$TC_{H3} = 640 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} + 12 \cdot 375 \frac{\text{€}}{\text{vuosi}} = 5140 \text{ €/vuosi}$$

Vastaus: H1:n Tilaukustannus on 1239,40 €/v ja ylläpitokustannus on 1239,36 €/v = 103,28 €/kk. H2:n ja H3:n tiedot ovat taulukossa oikein. Edullisin tarjous on H1

4. a) Laske käänteismatriisi  $B^{-1}$  ja b) matriisitulo  $C^T B$  ja c) determinanti  $\det(B)$  kun

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ ja } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c)  $\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = +0 - 0 + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

a) Minorit  
 $B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$ ,  $B_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2$ ,  $B_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$$B_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$
,  $B_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6$ ,  $B_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
,  $B_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ,  $B_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \begin{pmatrix} +B_{11} & -B_{21} & +B_{31} \\ -B_{12} & +B_{22} & -B_{32} \\ +B_{13} & -B_{23} & +B_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1,5 & -3,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

b)  $C^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Vastaus: a)  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1,5 & -3,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

b)  $C^T B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  c)  $\det(B) = 2$