

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

2. välikoe, (ti 27.5.2014)

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin (myös graafinen laskin on sallittu) ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava). opettaja: Matti Laaksonen

1. a) (2p) Panos-tuotos -analyysi (Mihin kehitetty? Mitä sillä lasketaan? Minkä hitaaseen muuttumiseen menetelmä perustuu?)
- b) (2p) Cramerin kaavat? (Milloin niitä voi käyttää? Milloin niitä kannattaa käyttää?)
- c) (2p) Luettele ainakin neljä determinantin ominaisuutta, joiden avulla determinantin laskemista voi helpottaa.

2. a) (3p) Laske integraali $\int (3x^2 + 4x + 7)dx$

b) (3p) Välillä $0 \leq x \leq 2$ on määritelty tiheysfunktio $f(x) = 0,75 \cdot (2x - x^2)$. Laske odotusarvo

$$E[x] = \int_0^2 x \cdot f(x) dx.$$

3. Laske matriisille A a) (2p) determinantti $\det(A)$, b) (3p) käänteismatriisi A^{-1} ja c) (1p) $A + BB^T$, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Ratkaise LP-malli

$$\begin{array}{rll} \text{maksimoi} & 4x_1 + & x_2 \\ \text{ehdoin} & 3x_1 + & x_2 \leq 18 \\ & 3x_1 + & 4x_2 \leq 36 \\ & & x_1 \leq 5 \\ & & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Kaavoja:

Derivaatta ja 2. asteen yhtälö

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$
$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jaksolliset suoritukset

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \quad a_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}, \quad c_{n,i} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Tasaerälaina ja osamaksukauppa

$$\begin{aligned} \text{annuiteetti } k &= c_{n,i}K_0 \\ \text{osamaksuerä } k &= c_{n,i}(H - h + m) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Matriisikaavoja ($n \times n$) neliöatriisille $\mathbf{A} = (a_{ij})$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{kj})$$

missä $\det(\mathbf{A}_{rs})$ on alkioon a_{rs} liittyvä minori

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = (\alpha_{ij})$$

missä $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ji})$ on alkioon a_{ji} liittyvä kofaktori

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{adj}(\mathbf{A})$$

Pseudoinverssi:

$$\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$$

Cramerin kaavat:

$$x_j = D_j / D$$

Indeksejä

$$\text{Laspeyres} \quad P_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t_0;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t_0;i}} \cdot 100, \quad Q_{t_0;t}^L = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t_0;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t_0;i}} \cdot 100$$

$$\text{Paaschen} \quad P_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i p_{t;i} q_{t;i}}{\sum_i p_{t_0;i} q_{t_0;i}} \cdot 100, \quad Q_{t_0;t}^P = \frac{\sum_i q_{t;i} p_{t;i}}{\sum_i q_{t_0;i} p_{t_0;i}} \cdot 100$$

Determinantit

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= +a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Talousmatematiikan perusteet, ORMS1030

2. välikoe, (ti 27.5.2014)

Ratkaise 3 tehtävää. Kokeessa saa olla mukana laskin (myös graafinen laskin on sallittu) ja taulukkokirja (MAOL tai vastaava). opettaja: Matti Laaksonen

1. a) (2p) Panos-tuotos -analyysi (Mihin kehitetty? Mitä sillä lasketaan? Minkä hitaaseen muuttumiseen menetelmä perustuu?)
b) (2p) Cramerin kaavat? (Milloin niitä voi käyttää? Milloin niitä kannattaa käyttää?)
c) (2p) Luettele ainakin neljä determinantin ominaisuutta, joiden avulla determinantin laskemista voi helpottaa.

a) Alunperin kehitetty kansantalouden eri toimialojen välisten riippuvuuksien mallintamiseen. Mallin avulla voidaan arvioida eri toimialojen kysynnän muutosten vaikutusta muiden toimialojen kasvuun. Myöhemmiksi mallia on sovellettu ison yrityksen arvon kestävyyssii riippuvuuksiin ja lopputuotteiden omakustannusarvojen laskeutumiseen. Menetelmä perustuu teknologia matriisiin hitaaseen muuttumiseen. Teknologia matriisi voidaan laskea viime vuoden tiedoista

b) Kvadraattisen ylitetöryhmän (n muuttujaa n ylitetöä) k:n:n muuttujan arvo on

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \text{ missä}$$

D on kerrain matriisin determinantti ja D_k on apudeterminantti kaaviole, jonka k:n sarake on ylitetöryhmän RHS ja muut sarakkeet ovat samat kuin kerrain matriisissa.

Cramerin kaavaa voi käyttää, jos

- ylitetöryhmä on kvadraattinen
- $D \neq 0$ ja $RHS \neq \vec{0}$

Cramerin kaavaa kannattaa käyttää, jos

- kerrain matriisissa on kääntäjämetriksi
- RHS on yksinkertainen
- ei laskele arvoja kaikille muuttujille

- c) *
- jos kaaviona on nollarivi tai nollasarake, niin kaavion determinantti on 0
 - jos kaaviossa on kaksi identtistä riviä tai kaksi identtistä saraketta, niin kaavion determinantti on 0
 - jos kaavion pohin rivi lisätään kerran kerrallaan toiseen riviin, niin syntyvän uuden kaavion determinantti on sama kuin alkuperäisen kaavion determinantti
 - jos kaavion kaksi riviä vaihtavat paikkoja, niin uuden kaavion determinantti on alkuperäisen kaavion determinantin vastaluku
 - kolmiomuodossa olevan kaavion determinantti on diagonaalielementtien tulo
 - $\det(A^T) = \det(A)$

2. a) (3p) Laske integraali $\int (3x^2 + 4x + 7) dx$

b) (3p) Välillä $0 \leq x \leq 2$ on määritelty tiheysfunktio $f(x) = 0,75 \cdot (2x - x^2)$. Laske odotusarvo

$$E[x] = \int_0^2 x \cdot f(x) dx.$$

$$a) \int (3x^2 + 4x + 7) dx = \frac{3}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + 7x + C = \underline{\underline{x^3 + 2x^2 + 7x + C}}$$

$$b) \int_0^2 x \cdot 0,75 \cdot (2x - x^2) dx = \int_0^2 (1,50 \cdot x^2 - 0,75 \cdot x^3) dx = \int_0^2 \left(\frac{1,50}{3} x^3 - \frac{0,75}{4} x^4 \right) dx = \left(\frac{1,50}{3} \cdot 8 - \frac{0,75}{4} \cdot 16 \right) - (0 - 0) = \underline{\underline{1}}$$

3. Laske matriisille A a) (2p) determinanti $\det(A)$, b) (3p) käänteismatriisi A^{-1} ja c) (1p) tulo $BB^T + A$, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a) \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1-4) - (-2-2) + (-4-(-1)) \\ &= -5 + 4 - 3 \\ &= \underline{\underline{-4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) m_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, & m_{12} &= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4, & m_{13} &= \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \\ m_{21} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, & m_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, & m_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \\ m_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, & m_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4, & m_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{21} & +m_{31} \\ -m_{12} & +m_{22} & -m_{32} \\ +m_{13} & -m_{23} & +m_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} (-5) & -(-1) & (3) \\ -(-4) & (0) & -(4) \\ (-3) & -(1) & (1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5/4 & -1/4 & -3/4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3/4 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25 & -0,25 & -0,75 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0,75 & 0,25 & -0,25 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

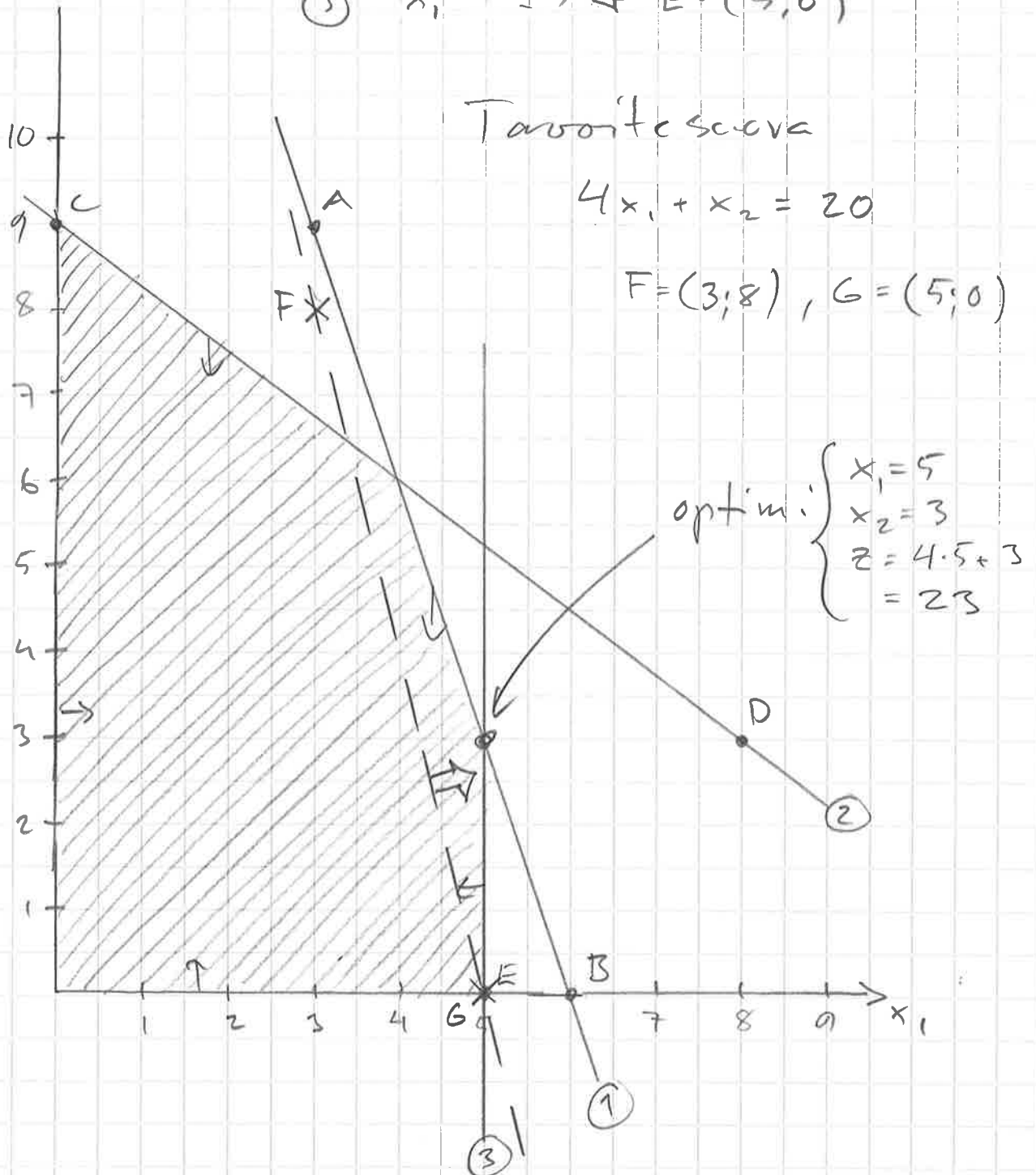
$$\begin{aligned} c) BB^T + A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Ratkaise LP-malli

$$\begin{aligned} \text{maksimoi } & 4x_1 + x_2 \\ \text{ehdoin } & 3x_1 + x_2 \leq 18 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

rajorajat:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 18 \quad \downarrow \quad A=(3,9), B=(6,0) \\ \textcircled{2} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 36 \quad \downarrow \quad C=(0,9), D=(8,3) \\ \textcircled{3} \quad & x_1 \leq 5 \quad \leftarrow \quad E=(5,0) \end{aligned}$$



Vastaus: optimissa $x_1 = 5, x_2 = 3$ ja $z = 23$